DS 4 : un corrigé

Le barème comporte un total de 66 points.

Exercices (sur 10 points)

Exercice 1 (sur 3 points) :

$\diamond$ *Injectivité :* Soit $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. $f(p,q) = \dfrac{pq^2+1}{q^2}$. Il s'agit d'un rationnel écrit sous forme irréductible. En effet, si $r \in \mathbb{N}$ est un diviseur commun de pq^2+1 et de q^2, alors r divise $1 = (pq^2+1) - q^2$, donc $r = 1$.
Si maintenant $(p', q') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est tel que $f(p,q) = f(p',q')$, d'après l'unicité de l'écriture d'un rationnel sous forme irréductible, on a $pq^2 + 1 = p'q'^2 + 1$ et $q^2 = q'^2$. Or $q, q' \in \mathbb{N}^*$, donc $q = q' \neq 0$, puis $p = p'$.
Ceci prouve que f est injective.
$\diamond$ *Surjectivité :* Supposons qu'il existe $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $f(p,q) = \frac{1}{2}$. Ainsi, $\frac{1}{2} = p + \frac{1}{q^2} = \frac{pq^2+1}{q^2}$. Toujours d'après l'unicité de l'écriture d'un rationnel sous forme irréductible, $pq^2 + 1 = 1$ et $q^2 = 2$. Alors $\sqrt{2} = q \in \mathbb{N}$, ce qui est faux.
Ceci prouve que f n'est pas surjective.

Exercice 2 (sur 2 points) :

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$. Posons $x = \left(\dfrac{6}{n(n-2)}\right)^{\frac{1}{3}}$.

D'après la formule du binôme de Newton, $(1+x)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$,

or $x \geq 0$ et $n \geq 3$, donc

$$(1+x)^n \geq \binom{n}{0} x^0 + \binom{n}{3} x^3 = 1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \times \frac{6}{n(n-2)} = 1 + n - 1 = n.$$

On en déduit que $n^{\frac{1}{n}} \leq 1 + x$, ce qui conclut.

Exercice 3 (sur 2 points) :

Pour choisir une telle main, on choisit d'abord les 3 piques (il y a $\binom{13}{3}$ choix), puis on choisit les deux autres couleurs (ce qui revient à choisir la couleur absente de la main, soit 3 choix), puis pour chacune de ces deux couleurs, on choisit 5 cartes parmi les 13, soit $\binom{13}{5}^2$ choix. En conclusion, le nombre de mains cherché est égal à $3\binom{13}{3}\binom{13}{5}^2$.

Exercice 4 (sur 3 points) :

Soit $x \in \mathbb{R}$.
⋄ Commençons par établir par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $R(n)$: $\dfrac{d^n}{dx^n}(e^{2x}) = 2^n e^{2x}$.
Pour $n = 0$, on a bien $\dfrac{d^0}{dx^0}(e^{2x}) = e^{2x} = 2^0 e^{2x}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, supposons $R(n)$.
Alors $\dfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(e^{2x}) = \dfrac{d}{dx}(2^n e^{2x}) = 2^{n+1}e^{2x}$, ce qui démontre $R(n+1)$.
D'après le principe de récurrence, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{d^n}{dx^n}(e^{2x}) = 2^n e^{2x}$.
⋄ D'après la formule de Leibniz, f est n fois dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$f^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k}(x^2) \times \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(e^{2x})$. Ainsi, lorsque $n \geq 2$,
$f^{(n)}(x) = \dbinom{n}{0} x^2 \times \dfrac{d^n}{dx^n}(e^{2x}) + n(2x) \times \dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{2x}) + n(n-1) \times \dfrac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(e^{2x})$. Alors, d'après le point précédent, $f^{(n)}(x) = e^{2x}(2^n x^2 + 2^n nx + 2^{n-2}n(n-1))$.
Pour $n = 1$, $f'(x) = 2xe^{2x} + 2x^2e^{2x}$, donc la formule précédente est également valable pour $n = 1$ et pour $n = 0$.

Problème : ensembles équipotents

Partie I : Équipotence (sur 22 points)

1°) (sur 1 point) Soit $F, G, H \in \mathcal{E}$.
Id_F est une bijection de F dans F, donc F est équipotent à lui-même, ce qui prouve que la relation d'équipotence est réflexive.
Supposons que F est équipotent à G. Il existe donc une bijection f de F dans G. Alors f^{-1} est une bijection de G dans F, donc G est équipotent à F. Ceci prouve que la relation d'équipotence est symétrique.

Supposons que F est équipotent à G et que G est équipotent à H. Il existe donc une bijection f de F dans G et une bijection g de G dans H. Alors d'après le cours, $g \circ f$ est une bijection de F dans H, donc F est équipotent à H. Ceci prouve que la relation d'équipotence est transitive.
En conclusion, on a montré que la relation d'équipotence est une relation d'équivalence.

2°) (sur 1 point)
$\diamond$ D'après le cours, si $F \in \mathcal{E}$, F est en bijection avec E si et seulement si F est fini de cardinal n. Ainsi, la classe d'équivalence de E est l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}$ qui sont des ensembles finis de cardinal n.
$\diamond$ Soit E une partie de $\mathbb{N}$. Si E est finie, le point précédent donne sa classe d'équipotence. Sinon, alors E est dénombrable et sa classe d'équipotence est l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}$ qui sont eux-mêmes dénombrables.

3°) (sur 3 points) Soit f une application croissante de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_p$. Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, posons $[\varphi(f)](i) = f(i) + i - 1$. Alors $\varphi(f)$ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_{p+n-1}$. En effet, pour tout $i \in \mathbb{N}_{n-1}$, $f(i) \leq f(i+1)$,
donc $[\varphi(f)](i) \leq f(i+1) + i - 1 < f(i+1) + i = [\varphi(f)](i+1)$.
Réciproquement, si g est une application strictement croissante de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_{n+p-1}$, alors en posant pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $[\Psi(g)](i) = g(i) - i + 1$, on définit une application croissante $\Psi(g)$ de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_p$.
On vérifie facilement que $\varphi \circ \Psi$ est égal à l'application identité sur l'ensemble des applications strictement croissantes de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_{n+p-1}$, ensemble que l'on notera S, et que $\Psi \circ \varphi$ est égal à l'identité sur l'ensemble C des applications croissantes de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_p$. Ainsi, C est équipotent à S.
Or pour construire un élément f de S, il suffit de choisir $f(\mathbb{N}_n)$ en tant que partie de n éléments choisis parmi les $n + p - 1$ éléments de $\mathbb{N}_{n+p-1}$, puis d'ordonner cette partie pour définir f, en tant qu'application strictement croissante.
Ainsi $|C| = |S| = \binom{n+p-1}{n}$, donc C est équipotent à $\mathbb{N}_N$ où $N = \binom{n+p-1}{n}$.

4°) (sur 3 points) Soit $x \in]0,1[$. Alors $\alpha(x) = \dfrac{x + (x-1)}{4x(1-x)} = \dfrac{1}{4}\Big(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{x}\Big)$, donc α est une application dérivable sur $]0,1[$ et $\alpha'(x) = \dfrac{1}{4}\Big(\dfrac{1}{(1-x)^2} + \dfrac{1}{x^2}\Big) > 0$. Ainsi, α est une application strictement croissante de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$. Elle est donc injective.
De plus, $\alpha(x) = \dfrac{1}{4}\Big(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{x}\Big) \underset{\substack{x \to 0 \\ x \in]0,1[}}{\longrightarrow} -\infty$ et $\alpha(x) = \dfrac{1}{4}\Big(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{x}\Big) \underset{\substack{x \to 1 \\ x \in]0,1[}}{\longrightarrow} +\infty$. Alors, α étant continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, α est surjective.
En conclusion, α est une bijection, ce qui prouve que $]0,1[$ et $\mathbb{R}$ sont équipotents.

5°) (sur 2 points) $\mathbb{N}^2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ([0,n] \cap \mathbb{N})^2$. En effet, si $(x,y) \in \mathbb{N}^2$, en posant $n = \max(x,y)$, on a bien $(x,y) \in ([0,n] \cap \mathbb{N})^2$. Ainsi, $\mathbb{N}^2$ est une union dénombrable d'ensembles finis, donc d'après le cours, $\mathbb{N}^2$ est au plus dénombrable. Mais $\mathbb{N}^2$ est infini, donc c'est un ensemble dénombrable.

6°) (sur 2 points) Notons $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ et $F = F_1 \times \cdots \times F_n$.
Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, il existe une bijection f_i de E_i dans F_i.
Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$, posons $f(x) = (f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n))$. Pour montrer que E et F sont équipotents, il suffit de montrer que f est une bijection de E dans F.
Or, pour tout $y = (y_1, \ldots, y_n) \in F$, on peut poser $g(y) = (f_1^{-1}(y_1), \ldots, f_n^{-1}(y_n))$.
g est une application de F dans E. On vérifie immédiatement que, pour tout $x \in E$, $(g \circ f)(x) = x$ et que, pour tout $y \in F$, $(f \circ g)(y) = y$. Ainsi, f et g sont deux bijections réciproques l'une de l'autre, ce qui conclut.

7°) (sur 2 points)
Il existe une bijection α de A dans E et une bijection β de B dans F.
Lorsque $f \in B^A$, on pose $\varphi(f) = \beta f \alpha^{-1}$, où le produit utilisé est l'opération de composition. Ainsi, φ est une application de B^A dans F^E.
De même, Lorsque $g \in F^E$, on pose $\Psi(g) = \beta^{-1} g \alpha$.
Alors Ψ est une application de F^E dans B^A.
Si $f \in B^A$, alors $(\Psi \circ \varphi)(f) = \Psi(\beta f \alpha^{-1}) = \beta^{-1} \beta f \alpha^{-1} \alpha = f$, donc $\Psi \circ \varphi = Id_{B^A}$. De même, on montre que $\varphi \circ \Psi = Id_{F^E}$, donc φ est une bijection, ce qui prouve que B^A et F^E sont équipotents.

8°) (sur 3 points) Si $f \in (A^B)^C$, pour tout $c \in C$ et $b \in B$, $f(c)(b) \in A$, donc si l'on pose, pour tout $(b, c) \in B \times C$, $[\varphi(f)](b, c) = f(c)(b)$, on définit une application $\varphi(f)$ de $B \times C$ dans A. Ainsi, φ est une application de $(A^B)^C$ dans $A^{B \times C}$.
De même, si $g \in A^{B \times C}$, si l'on pose, pour tout $(b, c) \in B \times C$, $[\Psi(g)](c)(b) = g(b, c)$, on définit une application Ψ de $A^{B \times C}$ dans $(A^B)^C$.
Soit $f \in (A^B)^C$. Soit $(b, c) \in B \times C$. Alors $[(\Psi \circ \varphi)(f)](b)(c) = [\varphi(f)](b, c) = f(b)(c)$, donc $(\Psi \circ \varphi)(f) = f$, pour tout $f \in (A^B)^C$. Ainsi, $\Psi \circ \varphi = Id_{(A^B)^C}$. De même, on montre que $\varphi \circ \Psi = Id_{A^{B \times C}}$. Ainsi, φ est une bijection, ce qui conclut.

9°) (sur 2 points) Supposons que I et $\mathcal{P}(I)$ sont équipotents. Alors il existe une bijection f de I dans $\mathcal{P}(I)$. Posons alors $A = \{x \in I \ / \ x \notin f(x)\}$. A est une partie de I, donc il existe $x_0 \in I$ tel que $A = f(x_0)$. Alors, $x_0 \in f(x_0) \Longleftrightarrow x_0 \in A \Longleftrightarrow x_0 \notin f(x_0)$. C'est impossible, donc I et $\mathcal{P}(I)$ ne sont pas équipotents.

10°) (sur 3 points) Notons φ l'application de $\mathcal{P}(I)$ dans $\{0, 1\}^I$ définie par :
pour tout $A \subset I$, $\varphi(A) = \mathbf{1}_A$, où $\mathbf{1}_A$ désigne la fonction indicatrice de A, c'est-à-dire l'application de I dans $\{0, 1\}$ définie par : pour tout $x \in I$, $\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in I \setminus A \end{cases}$.
Soit $A, B \in \mathcal{P}(I)$ tels que $\varphi(A) = \varphi(B)$. Alors, pour tout $x \in I$,
$x \in A \Longleftrightarrow \varphi(A)(x) = 1 \Longleftrightarrow \varphi(B)(x) = 1 \Longleftrightarrow x \in B$, donc $A = B$ ce qui prouve que φ est injective.
Soit $f \in \{0, 1\}^I$. Posons $A = \{x \in I \ / \ f(x) = 1\}$. Alors, pour tout $x \in A$, $f(x) = 1$ et pour tout $x \in I \setminus A$, $f(x) = 0$, donc $f = \varphi(A)$. Ceci prouve que φ est surjective.
En conclusion, φ est une bijection, ce qui prouve que $\mathcal{P}(I)$ est équipotent à $\{0, 1\}^I$.

Partie II : Subpotence (sur 26 points)

11°) (sur 2 points) Soit $E \in \mathcal{E}$ un ensemble infini. $E \neq \emptyset$, donc il existe $x_0 \in E$. $E \setminus \{x_0\}$ est non vide car E est infini, donc il existe $x_1 \in E \setminus \{x_0\}$. Supposons que l'on ait ainsi construit n éléments $x_0, \ldots, x_{n-1}$ de E deux à deux distincts, avec $n \geq 2$. E étant infini, $E \setminus \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ est non vide, donc il existe $x_n \in E \setminus \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$. On parvient ainsi à construire par récurrence une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E deux à deux distincts. Alors l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & E \\ n & \longmapsto & x_n \end{array}$ est une application injective de $\mathbb{N}$ dans E. Ceci prouve que $\mathbb{N}$ est subpotent à E.

12°) (sur 3 points)
$\diamond$ Supposons que F est subpotent à G. Ainsi, il existe une application f injective de F dans G. Alors $g = f|^{f(F)}$ est une bijection.
Lorsque $y \in f(F)$, posons $h(y) = g^{-1}(y)$ et lorsque $y \in G \setminus f(F)$, posons $h(y) = f$, où f est un élement fixé dans F (F est supposé non vide). Ainsi, h est une application de G dans F.
Soit $x \in F$. $f(x) \in f(F)$, donc $h(f(x)) = g(f(x)) = x$, par définition de g. Ainsi, $h \circ f = Id_F$.
Soit $x \in F$. Alors $h(f(x)) = x$, donc h est une surjection de G dans F.
$\diamond$ Réciproquement, supposons qu'il existe une surjection h de G dans F.
Pour tout $x \in F$, choisissons un élément dans l'ensemble non vide des antécédents de x par h et notons-le $f(x)$. D'après l'axiome du choix, ceci définit une application f de F dans G.
Lorsque $x \in F$, $f(x)$ est un antécédent de x par h, donc $h(f(x)) = x$. Ainsi, $h \circ f = Id_F$.
Soit $x, x' \in F$ tels que $f(x) = f(x')$. Alors $x = h(f(x)) = h(f(x')) = x'$, donc f est une injection ce qui prouve que F est subpotent à G.

13°) (sur 3 points)
$\diamond$ Commençons par montrer que $\leq$ est correctement définie, en prouvant que la relation "E est subpotent à F" ne dépend que de $\overline{E}$ et de $\overline{F}$.
Soit $E', F' \in \mathcal{E}$ tels que E est équipotent à E' et F est équipotent à F'.
Il existe donc une bijection f de E dans E' et une bijection f' de F dans F'.
Supposons que E est subpotent à F. Il existe une injection h de E dans F.
Alors, par composition d'injections, $f'hf^{-1}$ est une injection de E' dans F', donc E' est subpotent à F', ce qu'il fallait démontrer.
$\diamond$ Soit $E, F, G \in \mathcal{E}$.
Id_E est une injection de E dans E, donc $\overline{E} \leq \overline{E}$. Ainsi, $\leq$ est réflexive.
Supposons que $\overline{E} \leq \overline{F}$ et que $\overline{F} \leq \overline{E}$. Alors E est subpotent à F et F est subpotent à E, donc d'après le théorème de Cantor-Bernstein, E et F sont équipotents. Ainsi, $\overline{E} = \overline{F}$. Ceci prouve que $\leq$ est antisymétrique.
Supposons que $\overline{E} \leq \overline{F}$ et que $\overline{F} \leq \overline{G}$. Il existe une injection f de E dans F et une injection g de F dans G. Par composition d'injections, $g \circ f$ est une injection de E dans G, donc E est subpotent à G, puis $\overline{E} \leq \overline{G}$. Ainsi, $\leq$ est transitive.

En conclusion, on a montré que $\leq$ est une relation d'ordre sur l'ensemble quotient des classes d'équipotence de $\mathcal{E}$.

14°) (sur 2 points) On peut reprendre la construction de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la question 11 en imposant que $x_0 = x$. Posons $S = \{x_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ et $S^* = \{x_n \ / \ n \in \mathbb{N}^*\}$.
On définit une application f de E dans $E \setminus \{x\}$ en convenant que

— si $y \in E \setminus S$, $f(y) = y$;

— si $y \in S$, il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ tel que $y = x_n$.
On pose alors $f(y) = f(x_n) = x_{n+1}$.

On définit de même une application g de $E \setminus \{x\}$ dans E en convenant que

— si $y \in E \setminus S$, $g(y) = y$;

— si $y \in S^*$, il existe un unique $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $y = x_n$.
On pose alors $g(y) = g(x_n) = x_{n-1}$.

On vérifie aisément que $f \circ g = Id_{E\setminus\{x\}}$ et $g \circ f = Id_E$ (en vérifiant que $f(g(y)) = y$ et $g(f(y)) = y$, en distinguant le cas où $y \in S$ du cas où $y \in E \setminus S$). Ainsi f est une application bijective et ceci prouve que E est équipotent à $E \setminus \{x\}$.

15°) (sur 4 points) L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N}\times\{0\} \\ n & \longmapsto & (n,0) \end{array}$ est une bijection, donc $\mathbb{N}\times\{0\}$ est dénombrable. Ainsi, il est équipotent à F, donc il existe une bijection de $\mathbb{N}\times\{0\}$ dans F que l'on notera $\begin{array}{ccc} \mathbb{N}\times\{0\} & \longrightarrow & F \\ (n,0) & \longmapsto & x_{n,0} \end{array}$, de sorte que $F = \{x_{n,0} \ / \ n \in \mathbb{N}\}$.
De plus $E \setminus F$ est infini, donc d'après la question 11, $\mathbb{N}$ est subpotent à $E \setminus F$. Or, en adaptant la question 5, on peut montrer que $\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ est dénombrable, donc il existe une bijection de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$, puis par composition, on dispose d'une injection de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ dans $E \setminus F$, que l'on notera $\begin{array}{ccc} \mathbb{N}\times\mathbb{N}^* & \longrightarrow & E\setminus F \\ (n,m) & \longmapsto & x_{n,m} \end{array}$, de sorte que $\{x_{n,m} \ / \ n \in \mathbb{N}, \ m \in \mathbb{N}^*\}$ est une partie de $E \setminus F$.
Posons $S = \{x_{n,m} \ / \ n, m \in \mathbb{N}\}$ et $S^* = \{x_{n,m} \ / \ n \in \mathbb{N}, \ m \in \mathbb{N}^*\}$.
On définit une application f de E dans $E \setminus F$ en convenant que

— si $y \in E \setminus S$, $f(y) = y$;

— si $y \in S$, il existe un unique $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $y = x_{n,m}$.
On pose alors $f(y) = f(x_{n,m}) = x_{n,m+1}$.

On définit de même une application g de $E \setminus F$ dans E en convenant que

— si $y \in E \setminus S$, $g(y) = y$;

— si $y \in S^*$, il existe un unique $(n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ tel que $y = x_{n,m}$.
On pose alors $g(y) = g(x_{n,m}) = x_{n,m-1}$.

Par construction, pour tout $y \in E$, $f(y) \in (E \setminus S) \cup S^* = E \setminus F$, donc f est bien une application de E dans $E \setminus F$. On vérifie aisément que $f \circ g = Id_{E\setminus F}$ et $g \circ f = Id_E$ (en vérifiant que $f(g(y)) = y$ et $g(f(y)) = y$, en distinguant le cas où $y \in S$ du cas où $y \in E \setminus S$). Ainsi f est une application bijective et ceci prouve que E est équipotent à $E \setminus F$.

16°) $\diamond$ (sur 3 points) D'après le cours sur les développements en base 2 des réels, pour

tout $x \in]0,1[$, il existe une unique suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ telle que $x = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n 2^{-n-1}$ et telle que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $x_n \neq 1$.
Ainsi, $\begin{array}{rcl}]0,1[& \longrightarrow & \{0,1\}^{\mathbb{N}} \\ x & \longmapsto & (x_n) \end{array}$ est une application, non surjective. Elle est injective car si $x, y \in]0,1[$ vérifient que $(x_n) = (y_n)$, alors $x = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n 2^{-n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} y_n 2^{-n-1} = y$. Ainsi, $]0,1[$ est subpotent à $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.
En utilisant maintenant la notion de développement en base 4,
l'application $\begin{array}{rcl} \{0,1\}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow &]0,1[\\ (x_n) & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty}(x_n+1)4^{-n-1} \end{array}$ est non surjective, mais elle est injective, d'après l'unicité du développement en base 4. Ainsi, $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est subpotent à $]0,1[$.
Alors, d'après le théorème de Cantor-Bernstein, $]0,1[$ et $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sont équipotents.
$\diamond$ (sur 2 points) D'après la question 6, $]0,1[^2$ est équipotent à $(\{0,1\}^{\mathbb{N}})^2 = (\{0,1\}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}_2}$, lequel d'après la question 8 est équipotent à $\{0,1\}^{\mathbb{N}_2\times\mathbb{N}}$. Or $\mathbb{N}_2\times\mathbb{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}_2\times\{0,\ldots,n\}$, donc c'est un ensemble dénombrable, donc il est équipotent à $\mathbb{N}$. Alors d'après la question 7, puis par transitivité de l'équipotence, $]0,1[^2$ est équipotent à $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, donc est équipotent à $]0,1[$.

17°) (sur 3 points) D'après la question 4, $\mathbb{R}$ est équipotent à $]0,1[$, donc par transitivité de la relation d'équipotence et d'après la question précédente, $\mathbb{R}$ est équipotent à $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Alors d'après les questions 7 et 8, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est équipotent à $\{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{R}}$.
Mais $x \longmapsto x$ est une injection de $\mathbb{N}\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$, donc $\mathbb{N}\times\mathbb{R}$ est subpotent à $\mathbb{R}^2$ lequel est équipotent à $\mathbb{R}$ (car d'après la question 16, $]0,1[^2$ est équipotent à $]0,1[$, puis on combine les questions 4 et 6). Ainsi, $\mathbb{N}\times\mathbb{R}$ est subpotent à $\mathbb{R}$. Réciproquement, l'application $x \longmapsto (0,x)$ est une injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{N}\times\mathbb{R}$, donc $\mathbb{R}$ est subpotent à $\mathbb{N}\times\mathbb{R}$. Alors, d'après le théorème de Cantor-Bernstein, $\mathbb{N}\times\mathbb{R}$ est équipotent à $\mathbb{R}$. Ensuite, d'après la question 7, $\{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{R}}$ est équipotent à $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$, lequel est équipotent à $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ (question 10). Par transitivité de la relation d'équipotence, on en déduit que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est équipotent à $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

18°) (sur 4 points) L'application $f \longmapsto f|_{\mathbb{Q}}$ est une application de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$. Elle est injective. En effet, supposons que $f, g \in \mathcal{C}$ sont telles que $f|_{\mathbb{Q}} = g|_{\mathbb{Q}}$ et montrons que $f = g$. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, donc il existe $x_n \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.
f et g sont continues, donc $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$. Mais pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \mathbb{Q}$,
donc $f(x_n) = g(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(x)$. Par unicité de la limite, $f(x) = g(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $f = g$.
Ceci démontre donc que $\mathcal{C}$ est subpotent à $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$, or on a déjà vu que $\mathbb{R}$ est équipotent à $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, donc $\mathcal{C}$ est subpotent à $\{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{Q}}$, mais $\mathbb{N}\times\mathbb{Q}$ est dénombrable,
car $\mathbb{N}\times\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(k,\frac{p}{q}) \;/\; k\in\mathbb{N}, p\in\mathbb{Z}, q\in\mathbb{N}^*,\;\; k,|p|,q\in[0,n]\}$, donc par composition

et d'après les questions 7 et 8, $\mathcal{C}$ est subpotent à $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ qui est équipotent à $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, notons $h(x)$ l'application constante égale à x. Ainsi, h est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{C}$. Elle est injective, car pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, si $h(x) = h(y)$, on a bien $x = y$. Ainsi, $\mathbb{R}$ est subpotent à $\mathcal{C}$.
En conclusion, d'après le théorème de Bernstein, $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}$ sont équipotents.

Partie III : Equipotence entre E et E^2 (sur 8 points)

19°) (sur 1 point) Si E est fini, on a $|E| = |E^2| = |E|^2$, donc $|E| \in \{0,1\}$. Réciproquement, si E est vide ou est un singleton, alors E^2 est respectivement vide ou est un singleton, donc E et E^2 sont équipotents. En conclusion, les ensembles finis E tels que E est équipotent à E^2 sont exactement l'ensemble vide et les singletons.

20°) (sur 2 points)
Si $f \in E^E$, notons $G(f) = \{(x, f(x)) \ / \ x \in E\}$. Ainsi, $G(f)$ est le graphe de f. Alors G est une application de E^E dans $\mathcal{P}(E^2)$. Montrons qu'elle est injective : soit $f, g \in E^E$ telles que $G(f) = G(g)$. Soit $x \in E$. Alors $(x, f(x)) \in G(f) = G(g)$, donc il existe $y \in E$ tel que $(x, f(x)) = (y, g(y))$. Alors $x = y$ puis $f(x) = g(x)$. C'est vrai pour tout $x \in E$, donc $f = g$. Ainsi G est injective et E^E est subpotent à $\mathcal{P}(E^2)$.

21°) (sur 2 points)
◇ Il existe une application injective f de A dans B.
Notons F l'application de $\mathcal{P}(A)$ dans $\mathcal{P}(B)$ définie par :
pour tout $C \subset A$, $F(C) = f(C)$ (image directe de C par f).
Soit $C, D \in \mathcal{P}(A)$ telles que $F(C) = F(D)$. Soit $x \in C$. Alors $f(x) \in f(C) = f(D)$, donc il existe $y \in D$ tel que $f(x) = f(y)$, mais f est injective, donc $x = y \in D$. Ainsi, $C \subset D$. Par symétrie, on a aussi $D \subset C$, donc $D = C$, ce qui prouve que F est injective, donc que $\mathcal{P}(A)$ est subpotent à $\mathcal{P}(B)$.
◇ Par hypothèse, E^2 est subpotent à E, donc $\mathcal{P}(E^2)$ est subpotent à $\mathcal{P}(E)$.

22°) (sur 2 points) Soit $A \subset E$. E étant infini, il possède deux éléments distincts notés a et b. Notons f_A l'application de E dans E définie par : si $x \in A$ alors $f_A(x) = a$ et si $x \in E \setminus A$, alors $f_A(x) = b$. Ainsi, $A \longmapsto f_A$ est une application de $\mathcal{P}(E)$ dans E^E. Pour conclure, il suffit de montrer qu'elle est injective.
Soit $A, B \in \mathcal{P}(E)$ telles que $f_A = f_B$. Il suffit de montrer que $A = B$.
Pour tout $x \in E$, $x \in A \iff f_A(x) = a \iff f_B(x) = a \iff x \in B$, donc $A = B$, ce qui conclut.

23°) (sur 1 point) D'après la question 20, E^E est subpotent à $\mathcal{P}(E^2)$ lequel est subpotent à $\mathcal{P}(E)$ d'après la question 21, donc par transitivité, E^E est subpotent à $\mathcal{P}(E)$. Alors d'après la question précédente et le théorème de Cantor-Bernstein, E^E et $\mathcal{P}(E)$ sont équipotents.

Remarque : On peut montrer que tout ensemble infini E est équipotent à E^2, mais c'est délicat, cela nécessite la théorie des ordinaux.