

# DM 15 : Un corrigé

## Partie I : Groupes quotients

1°)

- Soit  $a \in G$ .  $a - a = 0 \in H$  car  $H$  est un sous-groupe, donc  $a R_H a$ . Ainsi,  $R_H$  est réflexive.
- Soit  $x, y \in G$  tels que  $x R_H y$ . Ainsi  $y - x \in H$ , mais  $H$  étant un sous-groupe il est stable par passage à l'opposé, donc  $x - y \in H$  et  $y R_H x$ . Ainsi  $R_H$  est symétrique.
- Soit  $x, y, z \in G$  tels que  $x R_H y$  et  $y R_H z$ . Ainsi,  $y - x \in H$  et  $z - y \in H$ , or  $H$  est stable pour l'addition, donc  $z - x = (y - x) + (z - y) \in H$  puis  $x R_H z$ . Ainsi  $R_H$  est transitive.

En conclusion,  $R_H$  est bien une relation d'équivalence.

Soit  $a \in G$ . Pour tout  $x \in G$ ,  $x \in \bar{a} \iff a R_H x \iff \exists h \in H, x - a = h$ , donc  $x \in \bar{a} \iff \exists h \in H, x = a + h$ . Ainsi,  $\bar{a} = \{a + h / h \in H\} = a + H$ .

2°)

- Commençons par montrer que la relation  $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$  définit convenablement une addition sur  $G/H$ , c'est-à-dire que  $\overline{a + b}$  ne dépend que de  $\bar{a}$  et  $\bar{b}$  et non de  $(a, b)$ .  
En effet, si  $a, b, a', b' \in G$  vérifient  $\bar{a} = \bar{a'}$  et  $\bar{b} = \bar{b'}$ , alors  $a' - a, b' - b \in H$  donc  $(a + b) - (a' + b') = (a - a') + (b - b') \in H$  puis  $\overline{a + b} = \overline{a' + b'}$ .
- Montrons ensuite que cette addition confère à  $G/H$  une structure de groupe.
  - Pour tout  $\bar{a}, \bar{b} \in G/H$ ,  $\bar{a} + \bar{b} \in G/H$ , donc il s'agit bien d'une loi interne.
  - Pour tout  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in G/H$ ,  $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \overline{a + b + c} = \overline{(a + b) + c}$ , or l'addition dans  $G$  est associative, donc  $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \overline{a + (b + c)} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ . Ceci prouve l'associativité.
  - Pour tout  $\bar{a}, \bar{b} \in G/H$ ,  $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b} = \overline{b + a} = \bar{b} + \bar{a}$ , ce qui prouve la commutativité.
  - Pour tout  $a \in G$ ,  $\bar{a} + \bar{0} = \overline{a + 0} = \bar{a}$ , donc  $\bar{0}$  est l'élément neutre.
  - Pour tout  $a \in G$ ,  $\bar{a} + \overline{-a} = \overline{a + (-a)} = \bar{0}$ , donc  $\bar{a}$  possède un symétrique, et  $\overline{-a} = \bar{-a}$ .

En conclusion,  $G/H$  est bien un groupe abélien.

- Notons  $\varphi$  l'application de  $G$  dans  $G/H$  définie par : pour tout  $a \in G$ ,  $\varphi(a) = \bar{a}$ . La définition de l'addition sur  $G/H$  dit que  $\varphi$  est un morphisme de groupes,

donc d'après le cours, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  et  $a \in G$ ,  $\varphi(na) = n\varphi(a)$ , c'est-à-dire que  $\overline{na} = n\overline{a}$ .

- D'après le cours, les sous-groupes de  $\mathbb{Z}$  sont exactement les  $n\mathbb{Z}$ , où  $n \in \mathbb{N}$ , donc les groupes de la forme  $\mathbb{Z}/H$  sont les groupes (connus)  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , avec  $n \in \mathbb{N}$ .

**3°)** D'après le cours, les classes d'équivalence de  $R_H$  constituent une partition de  $G$ , donc  $G = \bigsqcup_{x \in G/H} x$  puis en passant au cardinal,  $|G| = \sum_{x \in G/H} |x|$ .

Soit  $x \in G/H$  : il existe  $a \in G$  tel que  $x = \overline{a} = a+H$ , or l'application  $f : x \mapsto a+x$  est une bijection sur  $G$  (de bijection réciproque  $x \mapsto x-a$ ), donc  $|H| = |f(H)| = |\overline{a}| = |x|$ . On en déduit que  $|G| = \sum_{x \in G/H} |H| = |H| \times |G/H|$ .

## Partie II : Quelques définitions

**4°)**

- Par hypothèse, il existe  $A \subset G$  et  $B \subset H$  tels que  $A$  et  $B$  sont finis,  $G = \text{Gr}(A)$  et  $H = \text{Gr}(B)$ . Alors d'après le cours,  $G = \text{Gr}(A) = \left\{ \sum_{a \in A} n_a a / (n_a)_{a \in A} \in \mathbb{Z}^A \right\}$

$$\text{et } H = \text{Gr}(B) = \left\{ \sum_{b \in B} n_b b / (n_b)_{b \in B} \in \mathbb{Z}^B \right\}.$$

Soit  $(g, h) \in G \times H$ .

Il existe  $(n_a)_{a \in A} \in \mathbb{Z}^A$  et  $(n_b)_{b \in B} \in \mathbb{Z}^B$  telles que  $g = \sum_{a \in A} n_a a$  et  $h = \sum_{b \in B} n_b b$ .

$$\text{Alors } (g, h) = (g, 0) + (0, h) = \sum_{a \in A} n_a (a, 0) + \sum_{b \in B} n_b (0, b),$$

donc  $(g, h) \in \text{Gr}[(A \times \{0\}) \cup (\{0\} \times B)]$ .

Ainsi,  $G \times H \subset \text{Gr}[(A \times \{0\}) \cup (\{0\} \times B)]$  et l'inclusion réciproque est évidente car  $[(A \times \{0\}) \cup (\{0\} \times B)] \subset G \times H$ .

Ceci prouve que  $G \times H$  est engendré par  $(A \times \{0\}) \cup (\{0\} \times B)$ . C'est une partie finie, donc  $G \times H$  est bien de type fini.

- Par récurrence, on en déduit que si  $G_1, \dots, G_p$  sont  $p$  groupes abéliens de types finis, alors  $G_1 \times \dots \times G_p$  est encore de type fini. Or  $\mathbb{Z} = \text{Gr}(\{1\})$  et  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \text{Gr}(\{\overline{1}\})$  sont monogènes donc de types finis, donc pour tout  $k, \ell \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $(d_i)_{1 \leq i \leq \ell} \in \mathbb{N}^{*\ell}$ ,  $\mathbb{Z}^k \times (\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z}) \times \dots \times (\mathbb{Z}/d_\ell\mathbb{Z})$  est un groupe abélien de type fini.

**5°)**

- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est fini, donc pour tout  $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ,  $\text{Gr}(x)$  est fini :  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est de torsion.
- Pour tout  $n \in \mathbb{Z}^*$ , pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $nm \neq 0$ , donc  $n$  est d'ordre infini :  $\mathbb{Z}$  est sans torsion.
- $n(0, \overline{1}) = (0, \overline{n}) = 0$ , donc  $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  n'est pas sans torsion. Pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $p(1, 0) = (p, 0) \neq 0$ , donc  $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  n'est pas de torsion.

- Dans le groupe  $(\mathbb{C}^*, \times)$ ,  $i^2 = 1$ , donc ce groupe n'est pas sans torsion. Cependant, pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $2^p \neq 1$ , donc il n'est pas de torsion.
- Soit  $x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ . Il existe  $p \in \mathbb{Z}$  et  $q \in \mathbb{N}^*$  tels que  $x = \overline{\frac{p}{q}}$ . Alors  $qx = \bar{p} = 0$  car  $p \in \mathbb{Z}$ , donc  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  est de torsion.

**6°)** Si  $G$  est de cardinal fini, alors  $G = \text{Gr}(G)$ , donc  $G$  est de type fini. De plus pour tout  $x \in G$ ,  $\text{Gr}(x)$  est fini, donc  $G$  est de torsion.

Réciproquement, supposons que  $G$  est de type fini et de torsion.

Il existe donc une partie finie  $A$  de  $G$  telle que  $G = \text{Gr}(A)$ . Alors, pour tout  $g \in G$ , il existe  $(n_a)_{a \in A} \in \mathbb{Z}^A$  telle que  $g = \sum_{a \in A} n_a a$ , mais pour tout  $a \in A$ ,  $a$  est d'ordre fini,

donc en notant  $o(a)$  son ordre, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $na = ra$ , où  $r$  est le reste de la division euclidienne de  $n$  par  $o(a)$ . Ainsi,  $G \subset \left\{ \sum_{a \in A} n_a a \mid \forall a \in A, n_a \in \{0, \dots, o(a) - 1\} \right\}$ .

$A$  étant fini, ce dernier ensemble est fini (son cardinal est inférieur à  $\prod_{a \in A} o(a)$ ), donc  $G$  est fini.

### Partie III : Groupes abéliens finis

**7°)**  $o(x)o(y)(x+y) = o(y)(o(x)x) + o(x)(o(y)y) = 0 + 0 = 0$ , donc  $o(x+y)$  divise  $o(x)o(y)$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n(x+y) = 0$ . Alors  $nx = -ny$ , donc  $no(y)x = -no(y)y = 0$ , puis  $o(x) \mid no(y)$ , mais  $o(x) \wedge o(y) = 1$ , donc d'après le théorème de Gauss,  $o(x) \mid n$ . De même,  $o(y) \mid n$ , or  $o(x)$  et  $o(y)$  sont premiers entre eux, donc  $o(x)o(y) \mid n$ . En particulier, lorsque  $n = o(x+y)$ , on a montré que  $o(x)o(y)$  divise  $o(x+y)$  et que  $o(x+y)$  divise  $o(x)o(y)$ , donc ils sont égaux.

**8°)** Écrivons les décompositions de  $o(x)$  et  $o(y)$  en produit de nombres premiers :  $o(x) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_{o(x)}(p)}$  et  $o(y) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_{o(y)}(p)}$ .

Posons  $h = \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ v_p(o(x)) > v_p(o(y))}} p^{v_{o(x)}(p)}$  et  $k = \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ v_p(o(x)) \leq v_p(o(y))}} p^{v_{o(y)}(p)}$ .

Ainsi,  $h$  et  $k$  sont premiers entre eux et  $hk = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\max(v_{o(x)}(p), v_{o(y)}(p))} = o(x) \vee o(y)$ .

Il existe  $a, b \in \mathbb{N}^*$  tels que  $o(x) = ah$  et  $o(y) = bk$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n(ax) = 0 \iff (na)x = 0 \iff o(x) \mid na \iff h \mid n$ , donc  $h = o(ax)$ . De même,  $k = o(by)$ , donc d'après la question précédente,  $o(ax+by) = hk = o(x) \vee o(y)$ , ce qu'il fallait démontrer.

**9°)** En utilisant l'associativité du PPCM, on montre par récurrence sur  $n$ , que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $x_1, \dots, x_n \in G$ , il existe  $z \in G$  tel que l'ordre de  $z$  est égal au PPCM des ordres de  $x_1, \dots, x_n$ .

Or  $G$  est fini, donc il existe  $x_0 \in G$  tel que l'ordre de  $x_0$  est égal au PPCM des ordres des éléments de  $G$ .

Soit  $x \in G$  : alors  $o(x_0), o(x) \in \mathbb{N}^*$  et  $o(x) \mid o(x_0)$ , donc  $o(x_0) \geq o(x)$ . Ainsi,  $x_0$  est d'ordre maximal et, pour tout  $x \in G$ , l'ordre de  $x$  divise l'ordre de  $x_0$ .

**10°** On démontre cette propriété par récurrence forte sur  $|G|$  : soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Notons  $R(n)$  la propriété suivante : pour tout groupe abélien  $G$  de cardinal  $n$ , il existe  $\ell \in \mathbb{N}^*$  et  $d_1, \dots, d_\ell \in \mathbb{N}^*$  tels que, pour tout  $i \in \{1, \dots, \ell - 1\}$ ,  $d_{i+1}$  divise  $d_i$ , et tels que  $G$  est isomorphe à  $(\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z}) \times \dots \times (\mathbb{Z}/d_\ell\mathbb{Z})$ .

Lorsque  $n = 1$ , si  $G$  est de cardinal 1, alors  $G = \{0\}$ , donc il est isomorphe à  $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ , ce qui prouve  $R(1)$ , avec  $\ell = d_1 = 1$ .

Supposons que  $n \geq 2$  et que  $R(k)$  est vraie pour tout  $k \in \{1, \dots, n - 1\}$ . Montrons  $R(n)$ . Soit  $G$  un groupe abélien de cardinal  $n$ . D'après la question précédente, il existe  $x \in G$  d'ordre maximal. Notons  $d_1$  l'ordre de  $x$  et  $H = \text{Gr}(x)$ . D'après le cours, il existe un isomorphisme  $f$  de  $H$  dans  $\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z}$ .

D'après la question 3,  $|G/H| = \frac{|G|}{|H|} < |G|$  car  $d_1 \geq 2$  : sinon,  $d_1 = 1$ , donc tous les éléments de  $G$  sont d'ordre 1, c'est-à-dire sont nuls et  $G = \{0\}$ , ce qui est faux car  $n \geq 2$ .

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence au groupe abélien  $G/H$  : il existe  $\ell \geq 2$  et  $d_2, \dots, d_\ell \in \mathbb{N}^*$  tels que, pour tout  $i \in \{2, \dots, \ell - 1\}$ ,  $d_{i+1}$  divise  $d_i$ , et tels qu'il existe un isomorphisme  $g$  de  $G/H$  dans  $(\mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z}) \times \dots \times (\mathbb{Z}/d_\ell\mathbb{Z})$ .

D'après l'énoncé, il existe un isomorphisme  $h$  de  $G$  dans  $H \times (G/H)$ .

Pour tout  $(y, z) \in H \times (G/H)$ , notons  $\varphi(y, z) = (f(y), g(z))$ .

On a bien  $\varphi((y, z) + (y', z')) = \varphi(y, z) + \varphi(y', z')$  pour tout  $(y, z) \in H \times (G/H)$  et  $(y', z') \in H \times (G/H)$ , donc  $\varphi$  est un morphisme de  $H \times (G/H)$  dans  $(\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z}) \times \dots \times (\mathbb{Z}/d_\ell\mathbb{Z})$ .

Si  $\varphi(y, z) = 0$ , alors  $f(y) = 0$  et  $g(z) = 0$ , mais  $f$  et  $g$  sont injectifs, donc  $(y, z) = 0$ . Ainsi,  $\varphi$  est injectif.

Pour tout  $y' \in \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z}$  et  $z' \in (\mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z}) \times \dots \times (\mathbb{Z}/d_\ell\mathbb{Z})$ ,  $f$  et  $g$  étant surjectifs, il existe  $(y, z) \in H \times (G/H)$  tel que  $y' = f(y)$  et  $z' = g(z)$ , donc  $(y', z') = \varphi(y, z)$ . Ainsi,  $\varphi$  est un isomorphisme de  $H \times (G/H)$  dans  $(\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z}) \times \dots \times (\mathbb{Z}/d_\ell\mathbb{Z})$ . Par composition,  $\Psi = \varphi \circ h$  est un isomorphisme de  $G$  dans  $(\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z}) \times \dots \times (\mathbb{Z}/d_\ell\mathbb{Z})$ .

Il reste à montrer que  $d_2$  divise  $d_1$  : Notons  $d$  l'ordre de  $y = \Psi^{-1}(0, \bar{1}, 0, \dots, 0)$  dans  $G$ . D'après la question précédente,  $d$  divise  $d_1$ .

De plus,  $dy = 0$ , donc  $0 = \Psi(dy) = d(0, \bar{1}, 0, \dots, 0) = (0, \bar{d}, 0, \dots, 0)$ . Ainsi, dans  $\mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z}$ ,  $\bar{d} = 0$ , donc  $d_2$  divise  $d$ . Ceci prouve que  $d_2$  divise  $d_1$ , d'où  $R(n)$ .

La question est démontrée d'après le principe de récurrence forte.

11°)

- Soit  $(K, f) \in A$ . Alors  $K \subset K$  et  $f|_K = f$ , donc  $(K, f) \preceq (K, f)$ , ce qui montre que  $\preceq$  est réflexive.
- Soit  $(K, f), (K', f') \in A$  tels que  $(K, f) \preceq (K', f')$  et  $(K', f') \preceq (K, f)$ . Ainsi,  $K \subset K'$  et  $K' \subset K$ , donc  $K = K'$ . De plus, pour tout  $x \in K$ ,  $f(x) = f|_K(x) = f'(x)$ , donc  $f = f'$ . Ainsi,  $\preceq$  est antisymétrique.
- Soit  $(K, f), (K', f'), (K'', f'') \in A$  tels que  $(K, f) \preceq (K', f')$  et  $(K', f') \preceq (K'', f'')$ .  $K \subset K'$  et  $K' \subset K''$ , donc  $K \subset K''$ . De plus, pour tout  $x \in K$ ,  $f''(x) = f''|_{K'}(x) = f'(x) = f'|_K(x) = f(x)$ , donc  $f''|_K = f$ . Ainsi,  $(K, f) \preceq (K'', f'')$ . Ainsi,  $\preceq$  est transitive.

En conclusion,  $\preceq$  est bien une relation d'ordre.

- Notons  $B = \{(K, f) \in A / H \subset K \text{ et } f|_H = Id_H\}$ .

$G$  étant fini, il ne possède qu'un nombre fini de sous-groupes et, pour chacun des sous-groupes  $K$  de  $G$ , lui-même fini, il n'existe qu'un nombre fini d'applications de  $K$  dans  $H$ , donc  $B$  est fini. À ce titre, il possède nécessairement un élément maximal. En effet, dans le cas contraire, pour tout  $(K, f) \in A$ , il existerait  $(K', f') \in A$  tel que  $(K, f) \prec (K', f')$ , ainsi partant d'un élément  $(K_0, f_0) \in A$  ( $A$  est non vide car  $(H, Id_H) \in A$ ), on pourrait construire une suite  $((K_n, f_n))_{n \in \mathbb{N}}$  strictement croissante d'éléments de  $A$  : c'est en contradiction avec la finitude de  $A$ .

12°)

◇ Notons  $d$  l'ordre de  $x_0$  et  $\omega = e^{2i\frac{\pi}{d}}$ .

Pour tout  $kx_0 \in H = \text{Gr}(x_0)$ , où  $k \in \mathbb{Z}$ , posons  $g(kx_0) = \omega^k$ .

$g$  est correctement défini car si  $kx_0 = hx_0$  avec  $k, h \in \mathbb{Z}$ , alors  $k - h$  est un multiple de  $d$ , donc  $\omega^k = \omega^h$ .

On a clairement  $g(kx_0 + hx_0) = g(kx_0)g(hx_0)$ , donc  $g$  est un morphisme de groupes.

Si  $g(kx_0) = 1$ , alors  $\omega^k = 1$ , donc  $k$  est un multiple de  $d$  et  $kx_0 = 0$ . Ainsi  $\text{Ker}(g) = \{0\}$ , ce qui prouve que  $g$  est injectif.

◇  $g \circ f$  est un morphisme de  $K$  dans  $\mathbb{U}$

et  $K' = \text{Gr}(K \cup \{y_0\}) = \{x + ny_0 / x \in K \text{ et } n \in \mathbb{Z}\}$  (en effet, on peut vérifier que ce dernier ensemble est non vide et stable par différence, donc c'est un sous-groupe qui contient  $K \cup \{y_0\}$  et tout sous-groupe contenant  $K \cup \{y_0\}$  contient  $\{x + ny_0 / n \in \mathbb{Z}\}$ ). Ainsi, pour prolonger  $g \circ f$  en un morphisme  $\Psi$  défini sur  $K'$ , il faut choisir correctement  $\Psi(y_0)$  dans  $\mathbb{U}$ . Posons a priori  $\Psi(y_0) = e^{i\alpha}$  où  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

On souhaite poser, pour tout  $x \in K$  et  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\Psi(x + ny_0) = g \circ f(x)e^{in\alpha}$ , mais il faut s'assurer que cette dernière égalité définit correctement une fonction, c'est-à-dire que la quantité  $g \circ f(x)e^{in\alpha}$  ne dépend que de  $x + ny_0$ , ou encore que

$$(C) : \forall x, x' \in K, \forall n, n' \in \mathbb{Z}, [x + ny_0 = x' + n'y_0 \implies g \circ f(x)e^{in\alpha} = g \circ f(x')e^{in'\alpha}].$$

$$(C) \iff \forall x, x' \in K, \forall n, n' \in \mathbb{Z}, [(n - n')y_0 = x' - x \implies g \circ f(x - x') = e^{i(n' - n)\alpha}]$$

$$\iff \forall x \in K, \forall n \in \mathbb{Z}, [ny_0 = x \implies g \circ f(x) = e^{in\alpha}]$$

Notons  $b$  l'ordre de  $\overline{y_0}$  dans  $K'/K$  :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{Z}, ny_0 \in K \iff n\overline{y_0} = 0 \iff b \mid n.$$

Soit  $x \in K$  et  $n \in \mathbb{Z}$  tels que  $ny_0 = x$ . Ainsi  $b \mid n$ , donc il existe  $c \in \mathbb{Z}$  tel que  $n = bc$ . Ainsi,  $x = c(by_0)$ .  $by_0 \in K$ , donc  $f(by_0)$  est défini et appartient à  $H$ . Ainsi, il existe  $\beta \in \{0, \dots, d-1\}$  tel que  $f(by_0) = \beta x_0$ . Alors  $g \circ f(by_0) = \omega^\beta$  puis  $g \circ f(x) = \omega^{\beta c}$ . Ainsi,

$$g \circ f(x) = e^{in\alpha} \iff e^{2i\pi \frac{\beta c}{d}} = e^{in\alpha} = e^{ibc\alpha} \iff 2\pi \frac{\beta}{d} = b\alpha.$$

On pose donc  $\alpha = 2\pi \frac{\beta}{db}$  (ainsi  $\alpha$  ne dépend que de  $x_0, y_0$  et  $f$ ).

Pour tout  $(x, n) \in K \times \mathbb{Z}$ , on pose  $\Psi(x + ny_0) = g \circ f(x)e^{in\alpha}$ .

La condition (C) est alors vérifiée, donc  $\Psi$  est une application correctement définie de  $K'$  dans  $H$ .

On a clairement, pour tout  $x, x' \in K$  et  $n, n' \in \mathbb{Z}$ ,

$$\Psi((x + ny_0) + (x' + n'y_0)) = g \circ f(x).g \circ f(x')e^{in\alpha}e^{in'\alpha} = \Psi(x + ny_0)\Psi(x' + n'y_0),$$

donc  $\Psi$  est un morphisme de  $K'$  dans  $\mathbb{U}$ , qui prolonge  $g \circ f$  sur  $K'$ .

◇ Soit  $x \in K'$  : par construction de  $x_0$ , l'ordre de  $x_0$  est un multiple de l'ordre de  $x$ . Ainsi,  $dx = 0$ , puis  $1 = \Psi(dx) = \Psi(x)^d$ , donc  $\Psi(x) \in \mathbb{U}_d = g(H)$ . Ceci démontre que  $\Psi$  est à valeurs dans  $U_d = g(H)$ , or  $g|_{g(H)}$  est une bijection, donc  $(g|_{g(H)})^{-1} \circ \Psi$  réalise un morphisme de  $K'$  dans  $H$ . De plus, si  $x \in H$ ,  $\Psi(x) = g \circ f(x) = g(x)$ , donc  $(g|_{g(H)})^{-1} \circ \Psi(x) = x$ . On en déduit que le couple  $(K', (g|_{g(H)})^{-1} \circ \Psi)$  est un élément de  $B$ , strictement supérieur au couple  $(K, f)$ . Ceci contredit la maximalité de  $(K, f)$  dans  $B$ . C'est absurde.

**13°)** Il existe donc un morphisme  $f$  de  $G$  dans  $H$  tel que  $f|_H = Id_H$ .

Pour tout  $x \in G$ , posons  $\varphi(x) = (f(x), \bar{x}) \in H \times G/H$ .

$\varphi$  est un morphisme de  $G$  dans  $H \times G/H$  car, pour tout  $x, y \in G$ ,

$$\varphi(x + y) = (f(x) + f(y), \bar{x} + \bar{y}) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

Soit  $x \in \text{Ker}(\varphi)$  :  $(f(x), \bar{x}) = 0$ , donc  $\bar{x} = 0$  et  $f(x) = 0$ , ainsi  $x \in H$  puis

$0 = f(x) = f|_H(x) = x$ . Ceci démontre que  $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$ , donc  $\varphi$  est injective.

De plus,  $|G| = |H| \times |G/H|$ , donc  $f$  est une bijection. Il s'agit bien d'un isomorphisme entre  $G$  et  $H \times G/H$ .

## Partie IV : Sommes directes

**14°)** a) Soit  $x \in H_1 + H_2$ . Supposons qu'il existe  $h_1, h'_1 \in H_1$  et  $h_2, h'_2 \in H_2$  tels que  $x = h_1 + h_2 = h'_1 + h'_2$ .

Il existe  $n_1, n'_1, n_2, n'_2 \in \mathbb{Z}$  tels que  $h_1 = n_1(2, 1)$ ,  $h'_1 = n'_1(2, 1)$ ,  $h_2 = n_2(0, 2)$  et  $h'_2 = n'_2(0, 2)$ .

Ainsi  $x = (2n_1, n_1 + 2n_2) = (2n'_1, n'_1 + 2n'_2)$ , donc  $n_1 = n'_1$  puis  $n_2 = n'_2$ . On en déduit que  $h_1 = h'_1$  et  $h_2 = h'_2$ , donc la somme  $H_1 + H_2$  est directe.

b) Supposons d'abord que  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$ .

On peut écrire  $0 = 0.a + 0.b = b.a - a.b$ , donc la décomposition de 0 dans la somme  $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$  n'est pas unique. Ceci prouve que cette somme n'est pas directe.

Supposons maintenant que  $a = 0$  : Soit  $x \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = b\mathbb{Z}$ . Si  $x = h_1 + h_2 = h'_1 + h'_2$  avec  $h_1, h'_1 \in a\mathbb{Z} = \{0\}$  et  $h_2, h'_2 \in b\mathbb{Z}$ , alors  $h_1 = h'_1 = 0$  puis  $h_2 = h'_2$ , donc dans ce cas, la somme est directe. C'est encore vrai lorsque  $b = 0$ .

**15°)** a)  $H_1 + H_2$  est un groupe, car il contient 0, donc il est non vide, et si  $h_1 + h_2, h'_1 + h'_2 \in H_1 + H_2$ , alors  $(h_1 + h_2) - (h'_1 + h'_2) = (h_1 - h'_1) + (h_2 - h'_2) \in H_1 + H_2$ . De plus  $H_1 + H_2$  contient  $H_1 \cup H_2$  (car  $0 \in H_1 \cap H_2$ ).

Enfin, si  $H$  est un sous-groupe de  $G$  qui contient  $H_1 \cup H_2$ , alors,  $H$  étant stable pour l'addition, il contient  $H_1 + H_2$ .

En conclusion,  $H_1 + H_2$  est le plus petit sous-groupe de  $G$  contenant  $H_1 \cup H_2$ , ce qu'il fallait démontrer.

b) Pour tout  $(h_1, h_2) \in H_1 \times H_2$ , notons  $\varphi(h_1, h_2) = h_1 + h_2$ . Ainsi,  $\varphi$  est une application de  $H_1 \times H_2$  dans  $H_1 + H_2$ . Cette dernière somme étant directe, tout élément de  $H_1 + H_2$  possède un unique antécédent par  $\varphi$ , donc  $\varphi$  est une bijection. De plus,  $\varphi$  est un morphisme car on vérifie que  $\varphi((h_1, h_2) + (h'_1, h'_2)) = \varphi((h_1, h_2)) + \varphi((h'_1, h'_2))$ .

**16°)**

◇ Soit  $x \in (H_1 + H_2) + H_3$  : il existe  $h \in H_1 + H_2$  et  $h_3 \in H_3$  tel que  $x = h + h_3$ .

De plus il existe  $h_1 \in H_1$  et  $h_2 \in H_2$  tels que  $h = h_1 + h_2$ .

Ainsi, l'addition dans  $G$  étant associative,

$$x = (h_1 + h_2) + h_3 = h_1 + (h_2 + h_3) \in H_1 + (H_2 + H_3).$$

Ceci démontre que  $(H_1 + H_2) + H_3 \subset H_1 + (H_2 + H_3)$ . L'inclusion réciproque se démontre de la même façon.

◇ On suppose que  $H_1 \oplus H_2$  est directe, ainsi que  $(H_1 \oplus H_2) \oplus H_3$ .

— Soit  $h_2 + h_3 = h'_2 + h'_3 \in H_2 + H_3$ . Alors  $(0 + h_2) + h_3 = (0 + h'_2) + h'_3$  avec  $(0 + h_2), (0 + h'_2) \in H_1 + H_2$  et  $h_3, h'_3 \in H_3$ , or la somme entre  $H_1 + H_2$  et  $H_3$  est directe, donc  $0 + h_2 = 0 + h'_2$  et  $h_3 = h'_3$ . Ceci démontre que la somme  $H_2 + H_3$  est directe.

— Soit  $h_1 + h = h'_1 + h' \in H_1 + (H_2 \oplus H_3)$ . Il existe  $h_2, h'_2 \in H_2$  et  $h_3, h'_3 \in H_3$  tels que  $h = h_2 + h_3$  et  $h' = h'_2 + h'_3$ .

On peut écrire  $(h_1 + h_2) + h_3 = (h'_1 + h'_2) + h'_3$ , or la somme entre  $H_1 + H_2$  et  $H_3$  est directe, donc  $h_1 + h_2 = h'_1 + h'_2$  et  $h_3 = h'_3$ . De plus la somme entre  $H_1$  et  $H_2$  est directe, donc  $h_1 = h'_1$  et  $h_2 = h'_2$ . Ainsi  $h_1 = h'_1$  et  $h = h'$ , ce qui montre que la somme entre  $H_1$  et  $H_2 \oplus H_3$  est directe.

## Partie V : Groupes abéliens de rangs finis

**17°)** Supposons que  $B = (x_i)_{i \in I}$  est une base de  $G$ .

Soit  $x \in G \setminus \{0\}$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Il existe  $(n_i)_{i \in I} \in \mathbb{Z}^{(I)}$  telle que  $x = \sum_{i \in I} n_i x_i$ . Or  $x \neq 0$ ,

donc il existe  $i_0 \in I$  tel que  $n_{i_0} \neq 0$ .

Alors  $nx = \sum_{i \in I} n n_i x_i$  et  $n n_{i_0} \neq 0$ , donc  $nx \neq 0$  : sinon  $\sum_{i \in I} n n_i x_i$  et  $\sum_{i \in I} 0 \cdot x_i$  serait

deux décompositions différentes de 0 selon la base  $B$ . On a ainsi montré que pour tout  $x \in G \setminus \{0\}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $nx \neq 0$ , donc  $G$  est sans torsion.

**18°) a)** Pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ , il existe une partie finie  $I_j \subset I$  et une famille  $(n_{i,j})_{i \in I_j} \in \mathbb{Z}^{I_j}$  telle que  $x_j = \sum_{i \in I_j} n_{i,j} e_i$ .

Posons  $K = \bigcup_{1 \leq j \leq n} I_j$ . Soit  $i \in I$ . Il existe  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$  tels que  $e_i = \sum_{j=1}^n k_j x_j$ , donc

$$e_i = \sum_{j=1}^n k_j \sum_{i \in I_j} n_{i,j} e_i. \text{ Ainsi, il existe } (m_k)_{k \in K} \in \mathbb{Z}^K \text{ tel que } e_i = \sum_{k \in K} m_k e_k. \text{ Or } (e_i)_{i \in I}$$

est une base, donc  $i \in K$  : sinon l'égalité précédente fournirait deux décompositions différentes de  $e_i$  dans la base  $(e_j)_{j \in I}$ . On a montré que  $I \subset K$ , or  $K$  est fini, donc  $I$  est fini.

**b)**

◇  $0 \in H$ , donc  $H$  est non vide, et si  $2x, 2y \in H$ , alors  $2x - 2y = 2(x - y) \in H$ , donc  $H$  est bien un sous-groupe de  $G$ .

◇ Soit  $x, y \in G$ . Il existe  $k_1, \dots, k_n, h_1, \dots, h_n \in \mathbb{Z}$  tels que  $x = \sum_{i=1}^n k_i x_i$  et  $y = \sum_{i=1}^n h_i x_i$ .

Alors,  $x R_H y \iff \sum_{i \in I} (h_i - k_i) x_i \in H \iff \forall i \in I, h_i - k_i \in 2\mathbb{Z}$ . En effet, "  $\iff$  " est

évidente et si  $\sum_{i \in I} (h_i - k_i) x_i \in H$ , il existe  $y = \sum_{i \in I} m_i x_i$  tel que

$$\sum_{i \in I} (h_i - k_i) x_i = 2 \sum_{i \in I} m_i x_i, \text{ or } (x_i)_{1 \leq i \leq n} \text{ est une base, donc pour tout } i \in I, \\ h_i - k_i = 2m_i \in 2\mathbb{Z}.$$

On en déduit que  $G/H = \left\{ \overline{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i} \mid \forall i \in I, \varepsilon_i \in \{0, 1\} \right\}$  et que lorsque

$$(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}, (\varepsilon'_i)_{1 \leq i \leq n} \in \{0, 1\}^n \text{ avec } (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n} \neq (\varepsilon'_i)_{1 \leq i \leq n}, \text{ alors } \overline{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i} \neq \overline{\sum_{i=1}^n \varepsilon'_i x_i}.$$

Ceci démontre que  $|G/H| = 2^n$ .

◇ Si  $(y_1, \dots, y_p)$  est une autre base de  $G$  (nécessairement finie), alors  $G/H$  est aussi de cardinal  $2^p$ , donc  $p = n$ .

**19°) a)** Soit  $X$  une partie génératrice finie de  $G$ .

$$\text{Posons } N = \left\{ \sum_{x \in X} |n_x| / (n_x)_{x \in X} \in \mathbb{Z}^X \setminus \{0\} \text{ et } \sum_{x \in X} n_x x = 0 \right\}.$$

Par hypothèse,  $X$  n'est pas une base de  $G$ , donc il existe  $g \in G$  tel que  $g$  possède deux décompositions différentes selon la famille  $X$  :  $g = \sum_{x \in X} k_x x = \sum_{x \in X} h_x x$

avec  $(k_x)_{x \in X} \neq (h_x)_{x \in X}$ . Ainsi, en posant pour tout  $x \in X$ ,  $n_x = k_x - h_x$ , on a  $(n_x)_{x \in X} \in \mathbb{Z}^X \setminus \{0\}$  et  $\sum_{x \in X} n_x x = 0$ . Ceci montre que  $N$  est non vide, or c'est une partie

de  $\mathbb{N}$ , donc d'après le cours,  $N$  possède bien un minimum.

**b)** Notons  $M$  l'ensemble des cardinaux des parties finies génératrices de  $G$ .  $G$  étant



de type fini,  $M$  est non vide. Or  $M$  est une partie de  $\mathbb{N}$ , donc  $M$  possède bien un minimum, que l'on note  $n$ .

On note ensuite  $K = \{m_X / |X| = n \wedge (X \text{ est g\u00e9n\u00e9ratrice de } G)\}$ .  $K$  est encore une partie non vide de  $\mathbb{N}$ , donc elle possède un minimum, not\u00e9  $m_0$ . Alors il existe une partie g\u00e9n\u00e9ratrice  $X_0$  de  $G$  de cardinal  $n$  tel que  $m_{X_0} = m_0$ .

c) Supposons qu'il existe  $x_0 \in X_0$  tel que  $|n_{x_0}| = 1$ . Alors  $x_0 = \varepsilon \sum_{x \in X_0 \setminus \{x_0\}} n_x x$  o\u00f9

$\varepsilon \in \{-1, 1\}$ , donc  $X \setminus \{x_0\}$  est g\u00e9n\u00e9ratrice de  $G$ , ce qui est absurde car  $|X \setminus \{x_0\}| = n - 1$ , ce qui contredit la minimalit\u00e9 de  $n$ .

d)  $\{|n_x| / x \in X_0\} \cap \mathbb{N}^*$  est une partie non vide, car  $(n_x)_{x \in X_0}$  est non nulle, donc elle possède un minimum : il existe  $x_0 \in X_0$  tel que  $n_{x_0} \neq 0$  et tel que, pour tout  $x \in X_0$ ,  $n_x = 0$  ou bien  $|n_x| \geq |n_{x_0}|$ .

Supposons que pour tout  $y \in X_0$ ,  $|n_{x_0}| \mid |n_y|$ . Alors on peut \u00e9crire

$$n_{x_0} \left( x_0 + \sum_{x \in X_0 \setminus \{x_0\}} \frac{n_x}{n_{x_0}} x \right) = 0, \text{ car } \frac{n_x}{n_{x_0}} \in \mathbb{Z}, \text{ or } G \text{ est sans torsion,}$$

donc  $x_0 + \sum_{x \in X_0 \setminus \{x_0\}} \frac{n_x}{n_{x_0}} x = 0$ , ce qui prouve \u00e0 nouveau que  $X \setminus \{x_0\}$  est g\u00e9n\u00e9ratrice de

$G$ , ce qui est absurde. On en d\u00e9duit qu'il existe  $y \in X_0$  tel que  $|n_{x_0}|$  ne divise pas  $|n_y|$ . En particulier,  $n_y \neq 0$  et  $|n_y| \neq |n_{x_0}|$ , donc  $0 < |n_{x_0}| < |n_y|$ .

e) La division euclidienne de  $|n_y|$  par  $|n_{x_0}|$  s'\u00e9crit  $|n_y| = q|n_{x_0}| + r$  avec  $0 \leq r < |n_{x_0}|$ . De plus  $r \neq 0$  car  $|n_{x_0}|$  ne divise pas  $|n_y|$ .

Il existe  $\varepsilon, \varepsilon' \in \{-1, 1\}$  tels que  $n_y = \varepsilon q n_{x_0} + \varepsilon' r$ , donc

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{z \in X_0} n_z z = n_{x_0} x_0 + (\varepsilon q n_{x_0} + \varepsilon' r) y + \sum_{z \in X_0 \setminus \{x_0, y\}} n_z z \\ &= n_{x_0} (x_0 + \varepsilon q y) + \varepsilon' r y + \sum_{z \in X_0 \setminus \{x_0, y\}} n_z z : (1). \end{aligned}$$

Notons  $Y = (X_0 \setminus \{x_0\}) \cup \{x_0 + \varepsilon q y\}$ . Pour tout  $g \in G$ , il existe  $(m_z)_{z \in X_0} \in \mathbb{Z}^{X_0}$  tel que  $g = \sum_{z \in X_0} m_z z$ , donc  $g = \sum_{z \in X_0 \setminus \{x_0, y\}} m_z z + n_{x_0} (x_0 + \varepsilon q y) + (n_y - \varepsilon q n_{x_0}) y$ . Ainsi,  $Y$  est une

famille g\u00e9n\u00e9ratrice de  $G$  de cardinal  $n$ . Donc  $m_Y \geq m_{X_0}$ , mais d'apr\u00e8s la relation (1) et le fait que  $r \neq 0$ ,  $m_Y \leq |n_{x_0}| + |r| + \sum_{z \in X_0 \setminus \{x_0, y\}} |n_z| < |n_{x_0}| + |n_y| + \sum_{z \in X_0 \setminus \{x_0, y\}} |n_z| = m_{X_0}$ .

C'est impossible.

**20\u00b0)**

\u2266 Supposons que  $G$  est un groupe sans torsion de type fini. D'apr\u00e8s la question pr\u00e9c\u00e9dente, il est de rang fini, donc il existe une base de  $G$  de la forme  $(e_1, \dots, e_n)$ .

Pour tout  $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ , notons  $\varphi(k_1, \dots, k_n) = \sum_{i=1}^n k_i e_i$ . On v\u00e9rifie que  $\varphi$  est un

morphisme du groupe  $(\mathbb{Z}^n, +)$  dans  $G$ . Il est bijectif car  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $G$ . Ainsi, il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $G$  est isomorphe \u00e0  $\mathbb{Z}^n$ .

\u2266 R\u00e9ciproquement, supposons qu'il existe un isomorphisme  $\varphi$  de  $\mathbb{Z}^n$  dans  $G$ .

Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , posons  $e_i = \varphi((\delta_{i,j})_{1 \leq j \leq n})$ .

Soit  $g \in G$  et  $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ . Alors  $g = \sum_{i=1}^n k_i e_i$  si et seulement si

$$\varphi^{-1}(g) = \sum_{i=1}^n k_i \varphi^{-1}(e_i) = \sum_{i=1}^n k_i (\delta_{i,j})_{1 \leq j \leq n} = (k_1, \dots, k_n),$$

donc  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $G$ . Ainsi  $G$  est de rang fini, donc il est sans torsion et de type fini.

◇ On a montré que si  $G$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}^n$ , alors  $G$  est de rang fini égal à  $n$ , donc d'après la question 18.b,  $n$  est unique.

## Partie VI : Théorème de structure des groupes de types finis

**21°)**  $1 \cdot 0 = 0$ , donc  $0 \in T(G)$ .

Soit  $x, y \in T(G)$ . Notons  $o(x)$  et  $o(y)$  les ordres de  $x$  et  $y$ .

Alors  $o(x)o(y)(x - y) = o(y)(o(x)x) - o(x)(o(y)y) = 0$ , donc  $x - y \in T(G)$ .

Ainsi,  $T(G)$  est un sous-groupe de  $G$ .

**22°)**

◇ Soit  $\bar{x} \in G/T(G)$ . Supposons que  $\bar{x}$  est d'ordre fini. Ainsi, il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $0 = n\bar{x} = \overline{nx}$ , donc  $nx \in T(G)$  : c'est un élément de  $G$  d'ordre fini, donc il existe  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que  $m(nx) = 0$ . Ainsi  $x$  est aussi d'ordre fini, donc  $x \in T(G)$  puis  $\bar{x} = 0$ . Ceci prouve que  $G/T(G)$  est sans torsion.

◇  $G$  est de type fini, donc il existe  $(x_1, \dots, x_n)$  tel que  $G = \text{Gr}(\{x_1, \dots, x_n\})$ .

Soit  $\bar{x} \in G/T(G)$ .  $x \in G$ , donc il existe  $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$  tel que  $x = \sum_{i=1}^n k_i x_i$ . Alors

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n k_i \bar{x}_i.$$

Ceci prouve que  $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$  est une partie génératrice de  $G/T(G)$ , donc  $G/T(G)$  est de type fini.

**23°)**

◇ D'après la question 19,  $G/T(G)$  est de rang fini, donc il existe  $k \in \mathbb{N}$  et une base  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k)$  de  $G/T(G)$ .

Posons  $H = \text{Gr}(\{x_1, \dots, x_k\})$  :  $H$  est un sous-groupe de  $G$ .

◇ Montrons que  $G = H \oplus T(G)$  :

— Soit  $g \in G$ .  $\bar{g} \in G/T(G)$ , donc il existe  $(h_1, \dots, h_k) \in \mathbb{Z}^k$  tel que  $\bar{g} = \sum_{i=1}^k h_i \bar{x}_i$ .

Ainsi, si l'on pose  $t = g - \sum_{i=1}^k h_i x_i$ ,  $\bar{t} = 0$ , donc  $t \in T(G)$ .

Alors  $g = t + \sum_{i=1}^k h_i x_i \in T(G) + H$ . Ceci démontre que  $G = H + T(G)$ .

— Supposons que  $t + h = t' + h'$ , avec  $t, t' \in T(G)$  et  $h, h' \in H$ .

Alors  $t - t' \in H \cap T(G)$ . Ainsi, il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n(h - h') = 0$ . On en déduit que  $n(\overline{h - h'}) = 0$ , mais  $G/T(G)$  est sans torsion, donc  $\overline{h - h'} = 0$ . Si l'on pose  $h = \sum_{i=1}^k h_i x_i$  et  $h' = \sum_{i=1}^k h'_i x_i$ , alors  $\sum_{i=1}^k h_i \overline{x_i} = \sum_{i=1}^k h'_i \overline{x_i}$ , or  $(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_k})$  est une base de  $G/T(G)$ , donc  $h_i = h'_i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ . On en déduit que  $h = h'$ , puis que  $t = t'$ . Ceci prouve que  $H + T(G)$  est une somme directe.

◇ D'après la question 15.b, il existe un isomorphisme  $\varphi$  de  $G$  dans  $H \times T(G)$ .

◇ Pour tout  $(h_1, \dots, h_k) \in \mathbb{Z}^k$ , notons  $\Psi(h_1, \dots, h_k) = \sum_{i=1}^k h_i x_i$ . Ainsi  $\Psi$  est un morphisme de  $\mathbb{Z}^k$  dans  $H$ , clairement surjectif. De plus, si  $(h_1, \dots, h_k) \in \text{Ker}(\Psi)$ ,  $0 = \sum_{i=1}^k h_i \overline{x_i}$ , donc à nouveau,  $h_i = 0$  pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Ainsi  $\text{Ker}(\Psi) = \{0\}$  et

$\Psi$  est un isomorphisme de  $\mathbb{Z}^k$  dans  $H$ .

◇ Notons  $F$  l'application de  $G$  dans  $T(G)$  définie par :  $F(h + t) = t$ , pour tout  $h \in H$  et  $t \in T(G)$  :  $F$  est bien définie car  $G = H \oplus T(G)$ .

On vérifie que  $F$  est un morphisme de groupes.

$G$  est de type fini, donc il existe  $(y_1, \dots, y_p) \in G^p$  tel que  $\{y_1, \dots, y_p\}$  est génératrice de  $G$ .

Soit  $t \in T(G)$ . Alors  $t \in G$ , donc il existe  $(h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{Z}^p$  tel que  $t = \sum_{i=1}^p h_i y_i$ . On en

déduit que  $t = F(t) = \sum_{i=1}^p h_i F(y_i)$ , donc  $\{F(y_1), \dots, F(y_p)\}$  est génératrice de  $T(G)$ .

Ainsi,  $T(G)$  est un groupe de torsion et de type fini. D'après la question 6,  $T(G)$  est un groupe fini et d'après la question 10, il existe  $\ell \in \mathbb{N}^*$  et  $d_1, \dots, d_\ell \in \mathbb{N}^*$  tels que, pour tout  $i \in \{1, \dots, \ell - 1\}$ ,  $d_{i+1}$  divise  $d_i$  et  $T(G)$  est isomorphe à  $(\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z}) \times \dots \times (\mathbb{Z}/d_\ell\mathbb{Z})$ .

◇ En conclusion, il existe un isomorphisme  $F_1$  de  $H$  dans  $\mathbb{Z}^k$  et un isomorphisme  $F_2$  de  $T(G)$  dans  $(\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z}) \times \dots \times (\mathbb{Z}/d_\ell\mathbb{Z})$ .

Alors, en posant pour tout  $g \in G$ ,  $\varphi(g) = (\varphi_1(g), \varphi_2(g)) \in H \times T(G)$ , l'application  $g \mapsto (F_1(\varphi_1(g)), F_2(\varphi_2(g)))$  est un isomorphisme de  $G$  dans  $\mathbb{Z}^k \times [(\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z}) \times \dots \times (\mathbb{Z}/d_\ell\mathbb{Z})]$ , dont l'isomorphisme réciproque est  $(x_1, x_2) \mapsto \varphi^{-1}(F_1^{-1}(x_1), F_2^{-1}(x_2))$ .