

DM 18

Un théorème fondamental de géométrie projective

Partie I : Isomorphismes de corps

- 1°) Montrer que l'application c , définie par $c(z) = \bar{z}$ est un automorphisme du corps \mathbb{C} (on pourra admettre toute propriété usuelle portant sur la conjugaison d'un complexe).
- 2°) Existe-t-il un isomorphisme du corps \mathbb{Q} dans le corps \mathbb{R} ?
- 3°) Montrer que $Id_{\mathbb{Q}}$ est le seul automorphisme du corps \mathbb{Q} .
- 4°) Montrer que $Id_{\mathbb{R}}$ est le seul automorphisme du corps \mathbb{R} .
- 5°) On pose $\mathbb{K} = \{a + \sqrt{2}b / a, b \in \mathbb{Q}\}$. On admet que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Montrer que \mathbb{K} est un corps et déterminer ses automorphismes.

Partie II : Applications semi-linéaires

Dans toute la suite du problème :

- \mathbb{K} et \mathbb{L} désignent deux corps ;
- E est un \mathbb{K} -espace vectoriel et F est un \mathbb{L} -espace vectoriel ;

Lorsque σ est un isomorphisme du corps \mathbb{K} sur le corps \mathbb{L} et que f est une application de E dans F , on dit que f est σ -linéaire si et seulement si

- pour tout $x, y \in E$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$;
- pour tout $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x) = \sigma(\lambda)f(x)$.

6°) Avec les notations de la question 1, montrer que l'application $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{x} + \bar{y} \\ \bar{x} - \bar{y} \end{pmatrix}$ est c -linéaire de \mathbb{C}^2 dans lui-même.

7°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ensemble des applications c -linéaires de \mathbb{C}^n dans \mathbb{C} .

Pour la fin de cette partie, on suppose que σ est un isomorphisme du corps \mathbb{K} sur le corps \mathbb{L} et que f est une application σ -linéaire de E dans F .

8°) Montrer que l'image directe par f de tout sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F et que l'image réciproque par f de tout sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E .

9°) Si f est bijective et si E est de dimension finie, montrer que F est aussi de dimension finie et que $\dim(F) = \dim(E)$.

Partie III : Projectivités

Pour toute la suite de ce problème, on note \mathcal{E} l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E et \mathcal{F} l'ensemble des sous-espaces vectoriels de F .

On appelle projectivité de \mathcal{E} dans \mathcal{F} toute application f de \mathcal{E} dans \mathcal{F} bijective et telle que f et f^{-1} sont croissantes pour l'inclusion.

10°) On suppose que σ est un isomorphisme du corps \mathbb{K} sur le corps \mathbb{L} et que f est une application bijective et σ -linéaire de E dans F . Montrer que l'application $A \mapsto f(A)$ de \mathcal{E} dans \mathcal{F} est une projectivité.

11°) Soit (A, \leq_A) et (B, \leq_B) deux ensembles ordonnés et f une application bijective de A dans B telle que f et f^{-1} sont croissantes. Soit X une partie de A . On suppose que X et $f(X)$ possèdent chacun une borne supérieure. Montrer que $f(\sup(X)) = \sup(f(X))$.

Pour toute la suite de ce problème, f désigne une projectivité de \mathcal{E} dans \mathcal{F} .

En particulier, lorsque A est un sous-espace vectoriel de E , $f(A)$ est défini et c'est un sous-espace vectoriel de F . Cependant, il est important de noter que lorsque $x \in E$, la quantité $f(x)$ n'est pas définie en général, même si c'était le cas en question 10.

12°) Soit I un ensemble non vide quelconque et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E . Montrer que $f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} f(A_i)$.

13°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de n sous-espaces vectoriels de E . Montrer que $f\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n f(A_i)$.

Partie IV : les projectivités conservent la dimension

14°) Montrer que $f(\{0\}) = \{0\}$.

15°) Soit $A \in \mathcal{E}$ tel que $A \neq \{0\}$. Montrer que A est une droite si et seulement si

$$\forall B \in \mathcal{E}, [(B \neq \{0\}) \wedge (B \subset A) \implies B = A].$$

En déduire que l'image par f d'une droite de E est une droite de F .

16°) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et soit A_1, \dots, A_{n+1} $n+1$ sous-espaces vectoriels de E .

Montrer que la somme $\sum_{i=1}^{n+1} A_i$ est directe si et seulement si la somme $\sum_{i=1}^n A_i$ est directe

et si $A_{n+1} \cap \left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \{0\}$.

En déduire que si la somme $\sum_{i=1}^n A_i$ est directe, alors la somme $\sum_{i=1}^n f(A_i)$ est également directe et que l'on peut écrire $f\left(\bigoplus_{i=1}^n A_i\right) = \bigoplus_{i=1}^n f(A_i)$.

17°) Soit A un sous-espace vectoriel de E de dimension finie égale à n .

Si (e_1, \dots, e_n) est une base de A , montrer que $A = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{K}e_i$, où pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $\mathbb{K}e_i$ désigne la droite engendrée par e_i : $\mathbb{K}e_i = \{\lambda e_i / \lambda \in \mathbb{K}\}$.

En déduire que $f(A)$ est un sous-espace vectoriel de F de dimension finie et que $\dim(f(A)) = \dim(A)$.

18°) Soit $p \in \mathbb{N}^*$, soit $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ et $(y_1, \dots, y_p) \in F^p$ tels que pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $f(\mathbb{K}x_i) = \mathbb{L}y_i$. Montrer que (x_1, \dots, x_p) est libre si et seulement si (y_1, \dots, y_p) est libre.

Partie V : Réciproque de la question 10

Pour toute la suite du problème, on suppose que E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n , où $n \geq 3$.

19°) Soit x et y deux vecteurs de E tels que la famille (x, y) est libre.

Montrer qu'il existe deux vecteurs x' et t dans $F \setminus \{0\}$ tels que

$$f(\mathbb{K}x) = \mathbb{L}x' \text{ et } f(\mathbb{K}(x - y)) = \mathbb{L}t.$$

Construire à l'aide de x' et t un vecteur $y' \in F$ tel que

$$f(\mathbb{K}y) = \mathbb{L}y' \text{ et } f(\mathbb{K}(x - y)) = \mathbb{L}(x' - y').$$

20°) Pour tout $x, y \in E$ et $y' \in F$ tels que (x, y) est libre et $f(\mathbb{K}x) = \mathbb{L}x'$, montrer qu'il existe un unique $y' \in F$ tel que $f(\mathbb{K}y) = \mathbb{L}y'$ et $f(\mathbb{K}(x - y)) = \mathbb{L}(x' - y')$.

Pour la suite de ce problème, lorsque $x, y \in E$ et $y' \in F$ avec (x, y) libre et $f(\mathbb{K}x) = \mathbb{L}x'$, on note $h(x, x', y)$ l'unique vecteur y' de F défini en question 19.

21°) Soit $x, y \in E$ tels que (x, y) est libre et soit $x', y' \in F$ tels que $f(\mathbb{K}x) = \mathbb{L}x'$ et $f(\mathbb{K}y) = \mathbb{L}y'$. Montrer que $h(x, x', y) = y' \iff h(y, y', x) = x'$.

22°) Soit (x, y, z) une famille libre de 3 vecteurs de E . En utilisant notamment la notion de dimension, montrer que

- $\mathbb{K}(y - z) = (\mathbb{K}y + \mathbb{K}z) \cap (\mathbb{K}(x - y) + \mathbb{K}(x - z))$;
- $\mathbb{K}(x - y - z) = (\mathbb{K}(x - y) + \mathbb{K}z) \cap (\mathbb{K}(x - z) + \mathbb{K}y)$;
- $\mathbb{K}(y + z) = (\mathbb{K}y + \mathbb{K}z) \cap (\mathbb{K}(x - y - z) + \mathbb{K}x)$.

23°) Soit (x, y, z) une famille libre de 3 vecteurs de E . Soit $x' \in F$ tel que $f(\mathbb{K}x) = \mathbb{L}x'$. Montrer que si $y' = h(x, x', y)$ et $z' = h(x, x', z)$, alors $z' = h(y, y', z)$.

24°) Soit (x, y, z) une famille libre de 3 vecteurs de E . Soit $x' \in F$ tel que $f(\mathbb{K}x) = \mathbb{L}x'$. Montrer que $h(x, x', y + z) = h(x, x', y) + h(x, x', z)$.

On admet que l'application h permet de construire une application g de E dans F vérifiant :

- Pour tout $x \in E$ avec $x \neq 0$, $f(\mathbb{K}x) = \mathbb{L}g(x)$;
- pour tout $x, y \in E$, $g(x + y) = g(x) + g(y)$;
- g est bijective.

25°) Montrer qu'il existe un isomorphisme σ du corps \mathbb{K} sur le corps \mathbb{L} tel que g est σ -linéaire. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{E}$, $f(A) = g(A)$.