

## DM 18

# Un théorème fondamental de géométrie projective

### Partie I : Isomorphismes de corps

- 1°) Montrer que l'application  $c$ , définie par  $c(z) = \bar{z}$  est un automorphisme du corps  $\mathbb{C}$  (on pourra admettre toute propriété usuelle portant sur la conjugaison d'un complexe).
- 2°) Existe-t-il un isomorphisme du corps  $\mathbb{Q}$  dans le corps  $\mathbb{R}$  ?
- 3°) Montrer que  $Id_{\mathbb{Q}}$  est le seul automorphisme du corps  $\mathbb{Q}$ .
- 4°) Montrer que  $Id_{\mathbb{R}}$  est le seul automorphisme du corps  $\mathbb{R}$ .
- 5°) On pose  $\mathbb{K} = \{a + \sqrt{2}b / a, b \in \mathbb{Q}\}$ . On admet que  $\sqrt{2}$  est irrationnel. Montrer que  $\mathbb{K}$  est un corps et déterminer ses automorphismes.

### Partie II : Applications semi-linéaires

Dans toute la suite du problème :

- $\mathbb{K}$  et  $\mathbb{L}$  désignent deux corps ;
- $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F$  est un  $\mathbb{L}$ -espace vectoriel ;

Lorsque  $\sigma$  est un isomorphisme du corps  $\mathbb{K}$  sur le corps  $\mathbb{L}$  et que  $f$  est une application de  $E$  dans  $F$ , on dit que  $f$  est  $\sigma$ -linéaire si et seulement si

- pour tout  $x, y \in E$ ,  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  ;
- pour tout  $x \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $f(\lambda x) = \sigma(\lambda)f(x)$ .

- 6°) Avec les notations de la question 1, montrer que l'application  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{x} + \bar{y} \\ \bar{x} - \bar{y} \end{pmatrix}$  est  $c$ -linéaire de  $\mathbb{C}^2$  dans lui-même.

- 7°) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer l'ensemble des applications  $c$ -linéaires de  $\mathbb{C}^n$  dans  $\mathbb{C}$ .

Pour la fin de cette partie, on suppose que  $\sigma$  est un isomorphisme du corps  $\mathbb{K}$  sur le corps  $\mathbb{L}$  et que  $f$  est une application  $\sigma$ -linéaire de  $E$  dans  $F$ .

- 8°) Montrer que l'image directe par  $f$  de tout sous-espace vectoriel de  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $F$  et que l'image réciproque par  $f$  de tout sous-espace vectoriel de  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

- 9°) Si  $f$  est bijective et si  $E$  est de dimension finie, montrer que  $F$  est aussi de dimension finie et que  $\dim(F) = \dim(E)$ .

### Partie III : Projectivités

Pour toute la suite de ce problème, on note  $\mathcal{E}$  l'ensemble des sous-espaces vectoriels de  $E$  et  $\mathcal{F}$  l'ensemble des sous-espaces vectoriels de  $F$ .

On appelle projectivité de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{F}$  toute application  $f$  de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{F}$  bijective et telle que  $f$  et  $f^{-1}$  sont croissantes pour l'inclusion.

**10°)** On suppose que  $\sigma$  est un isomorphisme du corps  $\mathbb{K}$  sur le corps  $\mathbb{L}$  et que  $f$  est une application bijective et  $\sigma$ -linéaire de  $E$  dans  $F$ . Montrer que l'application  $A \mapsto f(A)$  de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{F}$  est une projectivité.

**11°)** Soit  $(A, \leq_A)$  et  $(B, \leq_B)$  deux ensembles ordonnés et  $f$  une application bijective de  $A$  dans  $B$  telle que  $f$  et  $f^{-1}$  sont croissantes. Soit  $X$  une partie de  $A$ .

On suppose que  $X$  et  $f(X)$  possèdent chacun une borne supérieure.

Montrer que  $f(\sup(X)) = \sup(f(X))$ .

Pour toute la suite de ce problème,  $f$  désigne une projectivité de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{F}$ .

En particulier, lorsque  $A$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ ,  $f(A)$  est défini et c'est un sous-espace vectoriel de  $F$ . Cependant, il est important de noter que lorsque  $x \in E$ , la quantité  $f(x)$  n'est pas définie en général, même si c'était le cas en question 10.

**12°)** Soit  $I$  un ensemble non vide quelconque et  $(A_i)_{i \in I}$  une famille de sous-espaces vectoriels de  $E$ . Montrer que  $f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} f(A_i)$ .

**13°)** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille de  $n$  sous-espaces vectoriels de  $E$ .

Montrer que  $f\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n f(A_i)$ .

### Partie IV : les projectivités conservent la dimension

**14°)** Montrer que  $f(\{0\}) = \{0\}$ .

**15°)** Soit  $A \in \mathcal{E}$  tel que  $A \neq \{0\}$ . Montrer que  $A$  est une droite si et seulement si

$$\forall B \in \mathcal{E}, [(B \neq \{0\}) \wedge (B \subset A) \implies B = A].$$

En déduire que l'image par  $f$  d'une droite de  $E$  est une droite de  $F$ .

**16°)** Soit  $n \in \mathbb{N}$  avec  $n \geq 2$  et soit  $A_1, \dots, A_{n+1}$   $n+1$  sous-espaces vectoriels de  $E$ .

Montrer que la somme  $\sum_{i=1}^{n+1} A_i$  est directe si et seulement si la somme  $\sum_{i=1}^n A_i$  est directe

et si  $A_{n+1} \cap \left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \{0\}$ .

En déduire que si la somme  $\sum_{i=1}^n A_i$  est directe, alors la somme  $\sum_{i=1}^n f(A_i)$  est également directe et que l'on peut écrire  $f\left(\bigoplus_{i=1}^n A_i\right) = \bigoplus_{i=1}^n f(A_i)$ .

**17°)** Soit  $A$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie égale à  $n$ .

Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $A$ , montrer que  $A = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{K}e_i$ , où pour tout  $i \in \mathbb{N}_n$ ,  $\mathbb{K}e_i$

désigne la droite engendrée par  $e_i$  :  $\mathbb{K}e_i = \{\lambda e_i / \lambda \in \mathbb{K}\}$ .

En déduire que  $f(A)$  est un sous-espace vectoriel de  $F$  de dimension finie et que  $\dim(f(A)) = \dim(A)$ .

**18°)** Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ , soit  $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$  et  $(y_1, \dots, y_p) \in F^p$  tels que pour tout  $i \in \mathbb{N}_p$ ,  $f(\mathbb{K}x_i) = \mathbb{L}y_i$ . Montrer que  $(x_1, \dots, x_p)$  est libre si et seulement si  $(y_1, \dots, y_p)$  est libre.

## Partie V : Réciproque de la question 10

Pour toute la suite du problème, on suppose que  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ , où  $n \geq 3$ .

**19°)** Soit  $x$  et  $y$  deux vecteurs de  $E$  tels que la famille  $(x, y)$  est libre.

Montrer qu'il existe deux vecteurs  $x'$  et  $t$  dans  $F \setminus \{0\}$  tels que

$$f(\mathbb{K}x) = \mathbb{L}x' \text{ et } f(\mathbb{K}(x - y)) = \mathbb{L}t.$$

Construire à l'aide de  $x'$  et  $t$  un vecteur  $y' \in F$  tel que

$$f(\mathbb{K}y) = \mathbb{L}y' \text{ et } f(\mathbb{K}(x - y)) = \mathbb{L}(x' - y').$$

**20°)** Pour tout  $x, y \in E$  et  $y' \in F$  tels que  $(x, y)$  est libre et  $f(\mathbb{K}x) = \mathbb{L}x'$ , montrer qu'il existe un unique  $y' \in F$  tel que  $f(\mathbb{K}y) = \mathbb{L}y'$  et  $f(\mathbb{K}(x - y)) = \mathbb{L}(x' - y')$ .

Pour la suite de ce problème, lorsque  $x, y \in E$  et  $y' \in F$  avec  $(x, y)$  libre et  $f(\mathbb{K}x) = \mathbb{L}x'$ , on note  $h(x, x', y)$  l'unique vecteur  $y'$  de  $F$  défini en question 19.

**21°)** Soit  $x, y \in E$  tels que  $(x, y)$  est libre et soit  $x', y' \in F$  tels que  $f(\mathbb{K}x) = \mathbb{L}x'$  et  $f(\mathbb{K}y) = \mathbb{L}y'$ . Montrer que  $h(x, x', y) = y' \iff h(y, y', x) = x'$ .

**22°)** Soit  $(x, y, z)$  une famille libre de 3 vecteurs de  $E$ . En utilisant notamment la notion de dimension, montrer que

- $\mathbb{K}(y - z) = (\mathbb{K}y + \mathbb{K}z) \cap (\mathbb{K}(x - y) + \mathbb{K}(x - z))$  ;
- $\mathbb{K}(x - y - z) = (\mathbb{K}(x - y) + \mathbb{K}z) \cap (\mathbb{K}(x - z) + \mathbb{K}y)$  ;
- $\mathbb{K}(y + z) = (\mathbb{K}y + \mathbb{K}z) \cap (\mathbb{K}(x - y - z) + \mathbb{K}x)$ .

**23°)** Soit  $(x, y, z)$  une famille libre de 3 vecteurs de  $E$ . Soit  $x' \in F$  tel que  $f(\mathbb{K}x) = \mathbb{L}x'$ . Montrer que si  $y' = h(x, x', y)$  et  $z' = h(x, x', z)$ , alors  $z' = h(y, y', z)$ .

**24°)** Soit  $(x, y, z)$  une famille libre de 3 vecteurs de  $E$ . Soit  $x' \in F$  tel que  $f(\mathbb{K}x) = \mathbb{L}x'$ . Montrer que  $h(x, x', y + z) = h(x, x', y) + h(x, x', z)$ .

On admet que l'application  $h$  permet de construire une application  $g$  de  $E$  dans  $F$  vérifiant :

- Pour tout  $x \in E$  avec  $x \neq 0$ ,  $f(\mathbb{K}x) = \mathbb{L}g(x)$  ;
- pour tout  $x, y \in E$ ,  $g(x + y) = g(x) + g(y)$  ;
- $g$  est bijective.

**25°)** Montrer qu'il existe un isomorphisme  $\sigma$  du corps  $\mathbb{K}$  sur le corps  $\mathbb{L}$  tel que  $g$  est  $\sigma$ -linéaire. Montrer que pour tout  $A \in \mathcal{E}$ ,  $f(A) = g(A)$ .