

# Séries de vecteurs

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Définitions</b>	<b>2</b>
1.1	Définition d'une série de vecteurs . . . . .	2
1.2	Convergence d'une série de vecteurs . . . . .	3
1.3	Convergence absolue . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Séries à termes positifs</b>	<b>9</b>
2.1	Théorèmes généraux . . . . .	9
2.2	Séries de Riemann . . . . .	13
2.3	Critère de D'Alembert . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Les séries alternées</b>	<b>17</b>
3.1	Le théorème des séries alternées . . . . .	17
3.2	Non commutativité des séries semi-convergentes. . . . .	19
3.3	La transformation d'Abel (hors programme) . . . . .	20

**Notation.**  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**Définition.** Un espace de Banach est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé complet.

**Notation.** On fixe dans ce chapitre un espace de Banach noté  $E$ .

## 1 Définitions

### 1.1 Définition d'une série de vecteurs

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de vecteurs de  $E$ . Alors  $(\sum_{k=0}^n a_k)_{n \in \mathbb{N}}$  est une nouvelle suite de vecteurs. Etudier la "série de terme général  $a_n$ ", c'est étudier cette nouvelle suite et notamment s'intéresser à l'existence et à la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k$ .

**Exemple.** Si  $a_n = a^n$  où  $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ ,  $\sum_{k=0}^n a_k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$ , donc lorsque  $|a| < 1$ , la série converge et a pour somme  $\frac{1}{1 - a}$ .

**Définition.** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de vecteurs. On appelle série de terme général  $a_n$ , et on note  $\sum a_n$ , la suite de terme général  $(a_n, \sum_{k=0}^n a_k)$ .

Ainsi,  $\sum a_n$  est une suite d'éléments de  $E^2$ .

**Remarque.** L'intérêt de cette définition un peu formelle est de distinguer les séries de vecteurs des suites de vecteurs.

**Propriété.** L'ensemble des séries de vecteurs, noté  $\mathcal{S}(E)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. De plus,  $\sum a_n + \alpha \sum b_n = \sum (a_n + \alpha b_n)$ , lorsque  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  sont dans  $\mathcal{S}(E)$  et lorsque  $\alpha \in \mathbb{K}$ .

**Démonstration.**

On vérifie que  $\mathcal{S}(E)$  est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites de  $E^2$ , c'est-à-dire qu'il est non vide et stable par combinaison linéaire.  $\square$

**Notation.** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de vecteurs.

$\sum_{k=0}^n a_k$  est appelée la somme partielle (des  $n + 1$  premiers termes) de  $\sum a_n$ .

**Propriété.** Soit  $(A_n)$  une suite de vecteurs. Il existe une unique série  $\sum a_n$  dont la suite des sommes partielles est  $(A_n)$ . Il s'agit de la série  $\sum (A_n - A_{n-1})$ , en convenant que  $A_{-1} = 0$ . Cette série est appelée la série télescopique associée à la suite  $(A_n)$ .

**Démonstration.**

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $a_n = A_n - A_{n-1}$ .

$$\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n A_k - \sum_{k=-1}^{n-1} A_k = A_n, \text{ donc la suite des sommes partielles de } \sum a_n \text{ est } (A_n).$$

On a ainsi montré l'existence.

**Formule.** En généralisant le calcul précédent, on obtient les formules suivantes, appelées *principe*

**des dominos :**  $\sum_{k=\min}^{\max} u_k - u_{k-1} = u_{\max} - u_{\min-1}$  et  $\sum_{k=\min}^{\max} u_k - u_{k+1} = u_{\min} - u_{\max+1}$ .

- Soit  $\sum b_n$  une seconde série dont la suite des sommes partielles est  $(A_n)$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $b_n = A_n - A_{n-1} = a_n$ , ce qui prouve l'unicité.  $\square$

**méthode** Cette propriété permet de ramener l'étude de la convergence d'une suite à celle de la convergence d'une série. On profite ainsi au choix de la théorie des suites ou de la théorie des séries.

**Attention !**  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$  n'est pas une somme partielle de série car  $\frac{1}{n+k}$  dépend de  $n$ .

Plus généralement, une quantité de la forme  $\sum_{k=0}^n a_{k,n}$  n'est pas une somme partielle de série si  $a_{k,n}$  dépend effectivement de  $n$ .

**Définition.** Soient  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  et  $(a_n)_{n \geq n_0}$  une suite de vecteurs.

$\sum_{n \geq n_0} a_n$  est la série  $\sum b_n$  où  $b_n = 0$  si  $n < n_0$  et  $b_n = a_n$  si  $n \geq n_0$ .

On dit que  $\sum_{n \geq n_0} a_n$  est une série tronquée à l'ordre  $n_0$ .

## 1.2 Convergence d'une série de vecteurs

**Définition.** Soit  $\sum a_n$  une série de vecteurs.

On dit que  $\sum a_n$  converge si et seulement si la suite des sommes partielles de  $\sum a_n$  converge. Dans ce cas, la limite de la suite des sommes partielles est appelée la somme de la série  $\sum a_n$ , et on note

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k.$$

Lorsque la suite des sommes partielles n'admet pas de limite, on dit que la série  $\sum a_n$  diverge.

**Remarque.** Comme pour les suites, la "nature" d'une série, c'est sa convergence ou sa divergence.

**Propriété.** Soient  $\sum a_n$  une série de vecteurs et  $n_0 \in \mathbb{N}^*$ .

Les séries  $\sum a_n$  et  $\sum_{n \geq n_0} a_n$  sont de même nature et en cas de convergence, si la somme

de la série tronquée est notée  $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ ,

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n.$$

**Démonstration.**

Posons  $C = \sum_{k=0}^{n_0-1} a_k$ . Pour  $n \geq n_0$ ,  $\sum_{k=0}^n a_k = C + \sum_{k=n_0}^n a_k$ , donc les suites  $(\sum_{k=0}^n a_k)$  et

$(\sum_{k=n_0}^n a_k)$  ont la même nature et lorsqu'elles convergent, en passant à la limite, on obtient (1).  $\square$

**Définition.** Soit  $\sum a_n$  une série convergente de vecteurs. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la quantité

$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$  est définie. On l'appelle le  $n$ -ième reste de Cauchy de la série  $\sum a_n$ . Il vérifie  $R_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

**Démonstration.**

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k - \sum_{k=0}^n a_k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = 0. \quad \square$$

**Remarque.** Ainsi, une interprétation de l'écriture  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^n a_k + R_n$  consiste à

regarder la somme partielle  $\sum_{k=0}^n a_k$  comme une valeur approchée de la somme totale

$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ , avec une erreur égale au reste de Cauchy.

**Corollaire.** On ne change pas la nature de la série  $\sum a_n$  si l'on modifie un nombre fini d'éléments de la suite  $(a_n)$ . Cependant, en cas de convergence, la somme de la série serait modifiée.

**Démonstration.**

Notons  $\sum b_n$  la nouvelle série, obtenue à partir de  $\sum a_n$  en ne modifiant qu'un nombre fini d'éléments de la suite  $(a_n)$ . Ainsi, il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $b_n = a_n$ .

Alors,  $\sum a_n$  a même nature que  $\sum_{n \geq n_0} a_n = \sum_{n \geq n_0} b_n$ , qui a même nature que  $\sum b_n$ .  $\square$

**Propriété.** Soit  $(u_n)$  une suite de vecteurs.

La série télescopique  $\sum (u_{n+1} - u_n)$  converge si et seulement si la suite  $(u_n)$  converge

et dans ce cas,  $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - u_0$ .

**Démonstration.**

D'après le principe des dominos, pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{n=0}^N (u_{n+1} - u_n) = u_{N+1} - u_0$ , donc les

suites  $(u_N)_{N \in \mathbb{N}}$  et  $(\sum_{n=0}^N (u_{n+1} - u_n))_{N \in \mathbb{N}}$  ont la même nature. C'est dire que  $\sum (u_{n+1} - u_n)$

converge si et seulement si la suite  $(u_n)$  converge. De plus, en faisant tendre  $N$  vers  $+\infty$  dans l'égalité précédente, on démontre la fin de la propriété.  $\square$

**Exemples.**

$\diamond$  On dit que  $(a_n)$  est une suite de vecteurs presque nulle lorsque  $\{n \in \mathbb{N} / a_n \neq 0\}$  est de cardinal fini. Dans ce cas, la série  $\sum a_n$  est convergente. En effet, la suite  $(a_n)$  ne diffère de la suite identiquement nulle qu'en un nombre fini d'éléments, donc  $\sum a_n$  a même nature que la série dont le terme général est identiquement nul ; elle converge.

$\diamond$  Etude de la série  $\sum_{n \geq 1} \ln(1 + \frac{1}{n})$ .

$\ln(1 + \frac{1}{n}) = \ln(n+1) - \ln(n)$ , donc d'après le principe des dominos,

$\sum_{k=1}^n \ln(1 + \frac{1}{k}) = \ln(n+1)$ , ce qui montre que la série est divergente. C'est un cas particulier de la propriété précédente.

$\diamond$  Etude de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ .

$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ , donc d'après la propriété précédente, cette série est conver-

gente et  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ .

**Propriété.** Si  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  sont deux séries convergentes et si  $\lambda \in \mathbb{K}$ , la série

$\sum (a_n + \lambda b_n)$  est convergente et  $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + \lambda b_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ .

**Démonstration.**

Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{n=0}^N (a_n + \lambda b_n) = \sum_{n=0}^N a_n + \lambda \sum_{n=0}^N b_n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ .  $\square$

**Propriété.** L'ensemble des séries convergentes de vecteurs est un sous-espace vectoriel

de  $\mathcal{S}(E)$ , noté  $\mathcal{S}_{conv}(E)$  et l'application  $\mathcal{S}_{conv}(E) \rightarrow E$  est linéaire.

$$\sum a_n \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

**Démonstration.**

• La série dont tous les termes sont nuls est convergente, donc  $\mathcal{S}_{conv}(E) \neq \emptyset$ .

De plus, si  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  sont dans  $\mathcal{S}_{conv}(E)$ , on vient de voir que

$\sum a_n + \lambda \sum b_n = \sum (a_n + \lambda b_n) \in \mathcal{S}_{conv}(E)$ , donc  $\mathcal{S}_{conv}(E)$  est bien un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{S}(E)$ .

• Notons  $\varphi$  l'application de l'énoncé.

$$\varphi(\sum a_n + \lambda \sum b_n) = \varphi(\sum (a_n + \lambda b_n)) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + \lambda b_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} b_n,$$

donc  $\varphi(\sum a_n + \lambda \sum b_n) = \varphi(\sum a_n) + \lambda \varphi(\sum b_n)$ .  $\square$

**Propriété.** La somme d'une série convergente et d'une série divergente est une série divergente.

**Démonstration.**

Soient  $\sum a_n$  une série convergente et  $\sum b_n$  une série divergente.

Si  $\sum (a_n + b_n)$  est convergente,  $\sum b_n = \sum ((a_n + b_n) - a_n)$  est convergente, ce qui est faux. Ainsi la série  $\sum (a_n + b_n)$  est divergente.  $\square$

**Remarque.** On en déduit que, si la somme de deux séries est convergente, ces deux séries ont même nature. Cependant, il est possible qu'elles divergent toutes les deux. Par exemple,  $\sum a_n + \sum (-a_n)$  converge, même lorsque  $\sum a_n$  diverge.

**Propriété.**

Si une série converge, son terme général tend vers 0. La réciproque est fautive.

**Démonstration.**

• Soit  $\sum a_n$  une série convergente. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$a_n = \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = 0.$$

•  $\ln(1 + \frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  mais on a vu que la série  $\sum_{n \geq 1} \ln(1 + \frac{1}{n})$  diverge. Ainsi la réciproque

est fautive.  $\square$

**Définition.** Lorsque la suite  $a_n$  ne tend pas vers 0, on dit que la série  $\sum a_n$  diverge grossièrement.

**Définition.** On appelle série géométrique les séries  $\sum a^n$  où  $a \in \mathbb{C}$ .

**Propriété.** La série géométrique  $\sum a^n$  converge si et seulement si  $|a| < 1$  et dans ce cas  $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$ .

**Démonstration.**

Le cas où  $|a| < 1$  est traité au début de ce chapitre.

Lorsque  $|a| \geq 1$ , la série géométrique diverge grossièrement.  $\square$

**Propriété. Séries à valeurs dans un produit.**

Soient  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $E_1, \dots, E_p$   $p$  espaces vectoriels normés, leurs normes étant notées  $N_1, \dots, N_p$ . On note  $E = E_1 \times \dots \times E_p$  que l'on munit de l'une des trois normes classiques.

Soient  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((x_{1,n}, \dots, x_{p,n}))_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$ .

Alors la série  $\sum x_n$  converge si et seulement si, pour tout  $i \in \mathbb{N}_p$ ,  $\sum x_{i,n}$  est convergente.

De plus, dans ce cas, 
$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} x_{1,n}, \dots, \sum_{n=0}^{+\infty} x_{p,n} \right).$$

**Démonstration.**

On applique la propriété portant sur la limite d'une suite à valeurs dans un produit,

à la suite des sommes partielles  $\left( \sum_{k=0}^n x_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$  : c'est une suite de  $E$  dont la suite des

$i$ -èmes composantes est  $\left( \sum_{k=0}^n x_{i,k} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ .  $\square$

**Exemple.**  $\sum_{n \geq 1} \left( \frac{1}{n(n+1)}, \frac{1}{3^n} \right)$  est une série convergente dans  $\mathbb{R}^2$ .

**Propriété. Séries à valeurs dans un espace de dimension finie.**

On suppose que  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie strictement positive, notée  $q$ . Soit  $e = (e_1, \dots, e_q)$  une base de  $E$ .

Soit  $(x_n)$  une suite de vecteurs de  $E$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $x_n = \sum_{i=1}^q x_{i,n} e_i$ .

Alors, la série  $\sum x_n$  converge dans  $E$  si et seulement si, pour tout  $i \in \mathbb{N}_q$ , la série  $\sum x_{i,n}$

converge dans  $\mathbb{K}$ , et, dans ce cas, 
$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \sum_{i=1}^q \left( \sum_{n=0}^{+\infty} x_{i,n} \right) e_i.$$

**Démonstration.**

On applique la propriété portant sur la limite d'une suite à valeurs dans un  $\mathbb{K}$ -espace

vectoriel de dimension finie, à la suite des sommes partielles  $\left( \sum_{k=0}^n x_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$  : c'est une

suite de  $E$  dont la suite des  $i$ -èmes coordonnées est  $\left( \sum_{k=0}^n x_{i,k} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ .  $\square$

**Propriété.** Soit  $\sum a_n$  une série de complexes. Elle converge si et seulement si les séries  $\sum \operatorname{Re}(a_n)$  et  $\sum \operatorname{Im}(a_n)$  convergent, et dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(a_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(a_n).$$

### 1.3 Convergence absolue

**Définition. Critère de Cauchy pour les séries.** Soit  $\sum a_n$  une série à termes dans  $E$ . On dit qu'elle vérifie le critère de Cauchy si et seulement si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall p \in \mathbb{N} \left\| \sum_{k=1}^p a_{n+k} \right\| \leq \varepsilon.$$

**Propriété.** Soit  $\sum a_n$  une série à termes dans  $E$ . Elle converge si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy.

**Démonstration.**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ . Si  $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ ,  $\sum_{k=1}^p a_{n+k} = A_{n+p} - A_n$ .

$\sum a_n$  converge si et seulement si la suite  $(A_n)$  est convergente, or  $E$  est un espace vectoriel de Banach, donc il est complet, ainsi la suite  $(A_n)$  converge si et seulement si c'est une suite de Cauchy. Ainsi  $\sum a_n$  converge si et seulement si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall p \in \mathbb{N} \|A_{n+p} - A_n\| \leq \varepsilon. \square$$

**Définition.** Soit  $\sum a_n$  une série à termes dans  $E$ .

$\sum a_n$  est absolument convergente si et seulement si la série  $\sum \|a_n\|$  est convergente.

**Propriété.** Soit  $\sum a_n$  une série à termes dans  $E$ . Si elle est absolument convergente, alors elle est convergente et dans ce cas,

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|a_n\| \text{ (Inégalité triangulaire).}$$

Cependant la réciproque est fautive.

**Démonstration.**

Soit  $\sum a_n$  une série dans  $E$  absolument convergente.

$\sum \|a_n\|$  vérifie le critère de Cauchy.

Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$  et  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\left\| \sum_{k=1}^p \|a_{n+k}\| \right\| \leq \varepsilon$ .

Soient  $n \geq N$  et  $p \in \mathbb{N}$ .  $\left\| \sum_{k=1}^p a_{n+k} \right\| \leq \sum_{k=1}^p \|a_{n+k}\| \leq \varepsilon$ , ce qui prouve que  $\sum a_n$  vérifie le critère de Cauchy, et donc qu'elle converge.

De plus, pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\left\| \sum_{n=0}^N a_n \right\| \leq \sum_{n=0}^N \|a_n\|$ . En faisant tendre  $N$  vers  $+\infty$ , on

obtient que  $\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|a_n\|$ .  $\square$

**Exemple.** La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos n}{n(n+1)}$  converge car elle est absolument convergente.



**Définition.** Soit  $\sum a_n$  une série à termes dans  $E$ .

On dit que  $\sum a_n$  est semi-convergente si et seulement si elle converge sans être absolument convergente.

**Remarque.** Ainsi, pour étudier une série de vecteurs  $\sum a_n$ , on commencera par étudier la série  $\sum \|a_n\|$ . Cette dernière est une série de réels positifs. On a donc intérêt à étudier de plus près les séries de réels positifs.

## 2 Séries à termes positifs

**Introduction :** Soit  $\sum a_n$  une série de réels positifs. Si  $a_n$  ne tend pas vers 0, la série diverge (grossièrement), donc pour que  $\sum a_n$  converge, il faut, informellement, que  $a_n$  tende vers 0 “suffisamment vite”, ou encore, que  $a_n$  soit suffisamment petit lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . On verra par exemple que  $\sum \frac{1}{n}$  diverge, donc  $\frac{1}{n}$  n’est pas assez petit, mais que  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge.

### 2.1 Théorèmes généraux

**Théorème.** Soit  $\sum a_n$  une série de réels.

On suppose que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \geq 0$ .

Alors  $\sum a_n$  converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Dans ce cas, en posant pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ ,  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ .

**Démonstration.**

La suite  $(A_n)$  est croissante, donc elle converge si et seulement si elle est majorée et dans ce cas, sa limite est égale à sa borne supérieure.  $\square$

**Remarque.** Soit  $\sum a_n$  une série divergente de réels positifs. Alors  $A_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ . Dans

ce cas, on note parfois  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$ .

**Propriété.** Soient  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  deux séries à termes positifs telles que  $\forall n \in \mathbb{N}$   $a_n \leq b_n$ .

- $\boxed{\text{Si } \sum b_n \text{ converge, alors } \sum a_n \text{ converge}}$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ .
- Si  $\sum a_n$  est divergente, alors  $\sum b_n$  diverge.

**Démonstration.**

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$  et  $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$ . Supposons que  $\sum b_n$  converge.

Alors la suite  $(B_n)$  est majorée, or pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n \leq B_n$ . Ainsi la suite  $(A_n)$  est aussi majorée et la série  $\sum a_n$  est convergente.

- Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{n=0}^N a_n \leq \sum_{n=0}^N b_n$ , donc en faisant tendre  $N$  vers  $+\infty$ ,

$$\text{on obtient : } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

- La fin de la propriété se démontre en prenant la contraposée.  $\square$

**Remarque.** Si dans la propriété précédente on suppose seulement que  $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 a_n \leq b_n$ , elle reste vraie mais, en cas de convergence, l'inégalité

$$\text{devient } \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n.$$

**Démonstration.**

On applique la propriété précédente aux séries tronquées à l'ordre  $n_0$ .  $\square$

**Remarque.** Lorsque  $\sum a_n$  est une série de complexes absolument convergente, on peut montrer qu'elle est convergente de manière élémentaire, sans utiliser la notion hors programme de suite de Cauchy :

◇ Supposons d'abord que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \in \mathbb{R}$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Posons  $a_n^+ = \max(a_n, 0)$  et  $a_n^- = \max(-a_n, 0)$ .

On vérifie que  $a_n = a_n^+ - a_n^-$  et  $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$ .

Ainsi,  $0 \leq a_n^+ \leq |a_n|$  et  $0 \leq a_n^- \leq |a_n|$ , donc  $\sum a_n^+$  et  $\sum a_n^-$  sont convergentes.

Or  $a_n = a_n^+ - a_n^-$ , donc  $\sum a_n$  est convergente.

◇ Supposons maintenant que  $(a_n)$  est une suite de complexes. Posons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = x_n + iy_n$  avec  $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ .

$|x_n| \leq |a_n|$ , donc  $\sum |x_n|$  converge, mais  $(x_n)$  est une suite de réels, donc d'après le point précédent,  $\sum x_n$  converge. De même, on montre que  $\sum y_n$  converge.

Alors  $\sum (x_n + iy_n) = \sum a_n$  est convergente.

**Propriété.** On note  $l^1(\mathbb{K}) = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} / \sum |u_n| \text{ converge} \}$ .

C'est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Pour tout  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{K})$ , posons  $\|u\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ .

Alors  $(l^1(\mathbb{K}), \|\cdot\|_1)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

**Démonstration.**

Pour tout  $u \in l^1(\mathbb{K})$ ,  $\|u\|_1 \geq 0$ .

◇ Soit  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{K})$  tel que  $\|x\|_1 = 0$ . Ainsi  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n| = 0$ , donc pour tout  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$0 \leq |x_j| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n| = 0, \text{ ce qui prouve que } x = 0.$$

◇ Soient  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{K})$ .  $\|\lambda x\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\lambda x_n| = |\lambda| \|x\|_1$ .

◇ Soient  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{K})$  et  $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{K})$ .

$$\|x + y\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n + y_n| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n| + |y_n| \leq \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

Ainsi  $\|\cdot\|_1$  est une norme sur  $l^1(\mathbb{K})$ .  $\square$

**Notation.** On note  $l^2(\mathbb{K})$  l'ensemble des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathbb{K}$  telles que  $\sum |u_n|^2$  converge.

**Propriété.**  $l^2(\mathbb{K})$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Pour tout  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{K})$ , posons  $\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|^2}$ .

Alors  $(l^2(\mathbb{K}), \|\cdot\|_2)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

**Démonstration.**

• Soient  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{K})$  et  $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{K})$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .  $(|x_n| - |y_n|)^2 \geq 0$ , donc  $|x_n y_n| \leq \frac{1}{2}(|x_n|^2 + |y_n|^2)$ .

On en déduit que  $|x_n + y_n|^2 \leq (|x_n| + |y_n|)^2 = |x_n|^2 + |y_n|^2 + 2|x_n||y_n| \leq 2(|x_n|^2 + |y_n|^2)$ .

Ainsi,  $x + y \in l^2(\mathbb{K})$ . De plus, pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha x \in l^2(\mathbb{K})$  et  $l^2(\mathbb{K})$  est non vide, donc c'est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

• Pour montrer la seconde partie de la propriété, seule l'inégalité triangulaire pose un problème. Soient  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{K})$  et  $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{K})$ . Soit  $N \in \mathbb{N}$ .

Posons  $X_N = (x_n)_{0 \leq n \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$  et  $Y_N = (y_n)_{0 \leq n \leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$ . On sait que  $\|\cdot\|_2$  est une norme sur  $\mathbb{K}^{N+1}$ , donc  $\|X_N + Y_N\|_2 \leq \|X_N\|_2 + \|Y_N\|_2$ .

Ainsi,  $\sqrt{\sum_{n=0}^N |x_n + y_n|^2} \leq \sqrt{\sum_{n=0}^N |x_n|^2} + \sqrt{\sum_{n=0}^N |y_n|^2}$ . On conclut en faisant tendre  $N$  vers  $+\infty$ .  $\square$

**Définition.** Soit  $(a_n)$  et  $(b_n)$  deux suites d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé  $E$ .

—  $a_n = O(b_n) \iff \exists C \in \mathbb{R}_+, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|a_n\| \leq C\|b_n\|$ .

—  $a_n = o(b_n) \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|a_n\| \leq \varepsilon\|b_n\|$ .

—  $a_n \sim b_n \iff a_n - b_n = o(b_n)$ .

**Remarque.** Lorsque  $E = \mathbb{C}$ , si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $b_n \neq 0$ , alors

—  $a_n = O(b_n) \iff \frac{a_n}{b_n}$  est bornée ;

—  $a_n = o(b_n) \iff \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et

—  $a_n \sim b_n \iff \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .

On dit que la suite  $a_n$  est négligeable devant la suite  $b_n$  si et seulement si  $a_n = o(b_n)$ .

De même, on dit que la fonction  $f(x)$  est négligeable devant  $g(x)$  lorsque  $x$  est au voisinage de  $a$  si et seulement si  $f(x) = o(g(x))$  au voisinage de  $a$ , c'est-à-dire, en

supposant que l'on peut diviser, si et seulement si  $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ .

On montrera plus tard le théorème suivant, dont l'énoncé peut être utilisé dès maintenant.

**Théorème des croissances comparées :** Soit  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$  et  $a > 1$ .

1. Les suites  $\ln^\alpha(n)$ ,  $n^\beta$ ,  $a^n$  et  $n!$  tendent vers  $+\infty$  et chacune est négligeable devant les suivantes.
2. Au voisinage de  $+\infty$ , les fonctions  $\ln^\alpha x$ ,  $x^\beta$  et  $e^{\gamma x}$  tendent vers  $+\infty$  et chacune est négligeable devant les suivantes.
3. Au voisinage de  $0^+$ ,  $|\ln x|^\alpha = o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$ .
4. Au voisinage de  $-\infty$ ,  $e^{\gamma x} = o\left(\frac{1}{|x|^\beta}\right)$ .

**Notation.** Pour la suite, notons  $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$  l'ensemble des séries de réels positifs.

**Propriété.** Soit  $\sum a_n$  une série de vecteurs et  $\sum b_n$  une série de **réels positifs**.

On suppose que  $\|a_n\| = \mathbf{O}(b_n)$  (c'est-à-dire  $a_n = \mathbf{O}(b_n)$ ).

Si la série  $\sum b_n$  converge, alors  $\sum a_n$  est absolument convergente.

Si la série  $\sum \|a_n\|$  diverge, alors  $\sum b_n$  est divergente.

**Démonstration.**

Il existe  $C > 0$  et  $n_0 \in \mathbb{N}$  tels que  $\forall n \geq n_0$   $\|a_n\| \leq Cb_n$ . Supposons que  $\sum b_n$  converge. Alors  $\sum Cb_n$  est convergente et, d'après une remarque précédente, la série  $\sum \|a_n\|$  converge.  $\square$

**Remarque.** En pratique, on utilise souvent ce théorème lorsque  $a_n = o(b_n)$ .

**Théorème.** Soient  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  deux séries de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$ . On suppose que  $a_n \sim b_n$ . Alors les deux séries ont la même nature.

**Démonstration.**

$a_n \sim b_n$ , donc il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,  $|a_n - b_n| \leq \frac{b_n}{2}$ .

Soit  $n \geq N$  : alors  $a_n - b_n \leq \frac{b_n}{2}$ , donc  $a_n \leq 3\frac{b_n}{2}$ .

On a aussi,  $b_n - a_n \leq \frac{b_n}{2}$ , donc  $b_n \leq 2a_n$ .

Ainsi, on a montré que  $a_n = \mathbf{O}(b_n)$  et  $b_n = \mathbf{O}(a_n)$ .

Si  $\sum b_n$  converge, comme  $a_n = \mathbf{O}(b_n)$ ,  $\sum a_n$  converge également.

De même, si  $\sum a_n$  converge, comme  $b_n = \mathbf{O}(a_n)$ ,  $\sum b_n$  converge également.  $\square$

**Théorème.** Soit  $\sum b_n$  une série de réels. On suppose que  $b_n$  est positif à partir d'un certain rang ou bien que  $b_n$  est négatif à partir d'un certain rang.

Soit  $\sum a_n$  une seconde série de réels.

Si  $a_n \sim b_n$ , alors  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  ont la même nature.

**Démonstration.**

Quitte à remplacer  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  par  $\sum(-a_n)$  et  $\sum(-b_n)$ , on peut se limiter au cas où  $b_n$  est positif à partir d'un certain rang  $N_1$ . Supposons que  $a_n \sim b_n$ .

Ainsi, il existe  $N_2 \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq N_2$ ,  $|a_n - b_n| \leq \frac{1}{2}|b_n|$ .

Posons  $N = \max(N_1, N_2)$ . Pour  $n \geq N$ ,  $b_n - a_n \leq \frac{1}{2}b_n$ , donc  $\frac{1}{2}b_n \leq a_n$ . En particulier,  $a_n \geq 0$ . On peut donc appliquer le théorème précédent aux séries tronquées  $\sum_{n \geq N} a_n$  et

$\sum_{n \geq N} b_n$  et conclure.  $\square$

**méthode** En pratique, pour déterminer la nature d'une série de vecteurs, on commence par étudier l'absolue convergence, ce qui nous ramène à des séries à termes positifs.

Pour étudier la convergence de séries de réels positifs, on les compare à l'aide des propriétés précédentes avec des séries dont on connaît déjà la nature (cf ci-dessous). La technique de comparaison la plus souvent utilisée est la relation d'équivalence, puis vient le "O", puis la relation d'ordre.

En résumé, **pour étudier la nature d'une série, on commence par rechercher un équivalent de son terme général.**

## 2.2 Séries de Riemann

**Technique de comparaison entre séries et intégrales (TCSI) :** Soit  $n_0 \in \mathbb{N}$ .

Soit  $f : [n_0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une application décroissante et continue. La TCSI consiste en la présentation des trois étapes suivantes :

*Première étape :* Soit  $k > n_0$ .  $f$  étant décroissante, pour tout  $t \in [k-1, k]$ ,  $f(k) \leq f(t) \leq f(k-1)$ .

*Deuxième étape :* On intègre ces inégalités entre  $k-1$  et  $k$ , en tenant compte du fait que  $\int_{k-1}^k f(k)dt = f(k)$  et  $\int_{k-1}^k f(k-1)dt = f(k-1)$ ,

on obtient  $f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t)dt \leq f(k-1)$ .

*Troisième étape :* Soit  $n > n_0$  : on somme ces dernières inégalités pour  $k$  variant de  $n_0 + 1$  à  $n$ . Ainsi, grâce à la relation de Chasles,  $\sum_{k=n_0+1}^n f(k) \leq \int_{n_0}^n f(t)dt \leq \sum_{k=n_0}^{n-1} f(k)$ .

**Théorème de comparaison entre séries et intégrales :** Soit  $n_0 \in \mathbb{N}$ .

Soit  $f : [n_0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une application décroissante et continue. On suppose de plus que, pour tout  $x \in [n_0, +\infty[$ ,  $f(x) \geq 0$ .

Alors la série  $\sum_{n \geq n_0} f(n)$  a même nature que la suite  $\left( \int_{n_0}^n f(t)dt \right)_{n \geq n_0}$ .

**Démonstration.**

La série  $\sum f(n)$  a même nature que la suite de ses sommes partielles  $\left( \sum_{k=n_0}^n f(k) \right)_{n \geq n_0}$ .

Les deux suites  $\left( \sum_{k=n_0}^n f(k) \right)_{n \geq n_0}$  et  $\left( \int_{n_0}^n f(t)dt \right)_{n \geq n_0}$  sont croissantes, car  $f$  est positive, donc elles convergent si et seulement si elles sont majorées, or la TCSI montre que l'une est majorée si et seulement si l'autre est majorée.  $\square$

**Définition.** Les séries de Riemann sont les séries de la forme  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ , où  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Propriété.**

La série de Riemann  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .

**Démonstration.**

Si  $\alpha \leq 0$ ,  $\frac{1}{n^\alpha}$  ne tend pas vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , donc la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  diverge grossièrement.

Supposons maintenant que  $\alpha > 0$  et posons, pour tout  $t \geq 1$ ,  $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$  :  $f$  est positive, décroissante et continue, donc d'après le TCSI,  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  a même nature que la suite de

terme général  $\int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \ln n & \text{si } \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}(n^{1-\alpha} - 1) & \text{si } \alpha \neq 1 \end{cases}$ . Cette dernière suite converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .  $\square$

**Exercice.** Nature de  $\sum \frac{n+1}{n^3+3}$ .

$\frac{n+1}{n^3+3} \sim \frac{1}{n^2}$  or  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  est convergente, donc, comme il s'agit de séries de réels positifs,  $\sum \frac{n+1}{n^3+3}$  est absolument convergente.

**Critère de Riemann :** Soient  $\sum a_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$ .

S'il existe  $\alpha > 1$  tel que  $n^\alpha a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , alors  $\sum a_n$  converge.

S'il existe  $\alpha \leq 1$  tel que  $n^\alpha a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ , alors  $\sum a_n$  diverge.

**Exercice.** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Nature de la série  $\sum_{n \geq 1} (\cos \frac{1}{n})^{n^\alpha}$ .

$a_n = (\cos \frac{1}{n})^{n^\alpha} = \exp(n^\alpha \ln(1 - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}))) = \exp(-\frac{1}{2}n^{\alpha-2} + o(n^{\alpha-2}))$ .

*Premier cas.* Si  $\alpha \leq 2$ , alors  $a_n$  ne tend pas vers 0, donc la série diverge grossièrement.

*Deuxième cas.* Si  $\alpha > 2$ . [ $a_n$ , sous cette forme exponentielle, apparaît comme "très petit" lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Ainsi, on conjecture que  $\sum a_n$  converge, et même que  $a_n = o(\frac{1}{n^2})$ .]

$n^2 a_n = \exp(-\frac{1}{2}n^{\alpha-2} + o(n^{\alpha-2}) + 2 \ln(n)) = \exp(-\frac{1}{2}n^{\alpha-2} + o(n^{\alpha-2})) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ ,

donc  $n^2 a_n = o(1)$ . Ainsi  $a_n = o(\frac{1}{n^2})$  et  $\sum a_n$  est une série de réels positifs, donc cette série est convergente.

**Propriété.** (Hors programme).  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$ , où  $\gamma$  est une constante appelée

la **constante d'Euler** (par le calcul numérique, on montre que  $\gamma = 0,5772 \pm 10^{-4}$ ), et où  $o(1)$  désigne une suite qui tend vers 0.

**Démonstration.**

Posons  $x_n = -\ln(n) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . Soit  $n \geq 2$ .  $x_n - x_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln(1 - \frac{1}{n}) = \mathbf{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , or

la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^2}$  est convergente, donc la série télescopique  $\sum (x_n - x_{n-1})$

converge. Ainsi, il existe  $\gamma \in \mathbb{R}$  tel que  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \gamma$ .  $\square$

**Exercice.** Etude des séries de Bertrand de la forme  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ , où  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ .

- *Premier cas.* Si  $\alpha > 1$ , Il existe  $\alpha' \in ]1, \alpha[$ .

$\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} = o\left(\frac{1}{n^{\alpha'}}\right)$ , donc  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$  est convergente.

- *Deuxième cas.* Si  $\alpha < 1$ ,  $\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}\right)$ , donc  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$  est divergente.

- *Troisième cas.* Si  $\alpha = 1$ .

Si  $\beta < 0$ ,  $\frac{1}{n} = \mathbf{O}\left(\frac{1}{n \ln^\beta n}\right)$ , donc la série de Bertrand est divergente.

On suppose maintenant que  $\beta \geq 0$ . Ainsi l'application

$$f : [2, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{t \ln^\beta t} \text{ est décroissante et positive.}$$

La série de Bertrand est donc convergente si et seulement si la suite  $\left(\int_2^n \frac{dt}{t \ln^\beta t}\right)_{n \geq 2}$  est convergente.

Or, pour tout  $x > 2$ ,  $\int_2^x \frac{dt}{t \ln^\beta t} = \begin{cases} \left[\frac{\ln^{1-\beta} t}{1-\beta}\right]_2^x & \text{si } \beta \neq 1 \\ [\ln \ln t]_2^x & \text{si } \beta = 1 \end{cases}$ , donc la série converge si et seulement si  $\beta > 1$ .

## 2.3 Critère de D'Alembert

**Propriété. Critère de D'Alembert.** Soit  $\sum a_n$  une série de réels positifs, non nul à partir d'un certain rang,  $\text{telle que } \frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \in \overline{\mathbb{R}}$ .

- ◇ Si  $l < 1$ ,  $\sum a_n$  est convergente,
- ◇ Si  $l > 1$  ou si  $l = 1^+$ ,  $\sum a_n$  diverge grossièrement.
- ◇ Lorsque  $l = 1$ , on ne peut conclure. On est dans le cas douteux du critère de d'Alembert.

**Démonstration.**

Par hypothèse, il existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq N_1$ ,  $a_n \neq 0$ .

- Supposons que  $l < 1$ . posons  $L = \frac{1+l}{2}$ . Alors  $l < L < 1$ , donc d'après le lemme du tunnel, il existe  $N \geq N_1$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq L$ .

Par récurrence, on en déduit : pour tout  $n \geq N$ ,  $a_n \leq a_N L^{n-N}$ . Ainsi  $a_n = \mathbf{O}(L^n)$ , or  $\sum L^n$  est une série géométrique convergente, donc  $\sum a_n$  converge.

- Supposons que  $l > 1$  ou que  $l = 1^+$ . Il existe  $N \geq N_1$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ . Ainsi la suite  $(a_n)_{n \geq N}$  est croissante, donc  $\forall n \geq N$   $a_n \geq a_N \neq 0$ , ce qui

montre que  $a_n$  ne tend pas vers 0, donc que  $\sum a_n$  diverge grossièrement.

• Pour une série de Riemann, on a toujours  $l = 1$ , ce qui montre que c'est un cas douteux.  $\square$

**Exemple.** Nature de  $\sum a_n$ , où  $a_n = \frac{n!}{n^n}$ .

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = (n+1) \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-n \ln(1 + \frac{1}{n})} = e^{-1+o(1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e} < 1,$$

donc la série est convergente.

**méthode** Le critère de D'Alembert sert peu. En effet, il ne permet qu'un tri assez grossier entre les séries qui convergent plus vite qu'une série géométrique de raison strictement inférieure à 1 et les séries qui divergent grossièrement. Toute autre série "tombe" dans le cas douteux.

Ce critère est donc à réserver au cas où la quantité  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$  est nettement plus simple que  $a_n$ , comme dans l'exemple ci-dessus.

Dans le cadre des séries entières, ce critère fera un formidable "come back". Il est utile pour calculer le rayon de convergence d'une série entière.

**Remarque.** *Hors programme* : Si  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont deux suites de réels strictement positifs telles que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ , alors  $a_n = \mathbf{O}(b_n)$ . En effet,

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_n}{b_n}, \text{ donc la suite de terme général } \frac{a_n}{b_n} \text{ est décroissante. Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}, \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{a_0}{b_0}, \text{ donc } a_n = \mathbf{O}(b_n).$$

En particulier, si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq b < 1$ , alors  $a_n = \mathbf{O}(b^n)$  et  $\sum a_n$  converge, et si  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq b \geq 1$ ,  $b^n = \mathbf{O}(a_n)$  et  $\sum a_n$  diverge.

**Propriété.** **Formule de Stirling.**  $n! \sim \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n$ .

**Démonstration.**

cf DM.  $\square$

**Exemple.** Reprenons  $a_n = \frac{n!}{n^n}$  :  $a_n \sim \sqrt{2\pi n} e^{-n}$ , donc d'après les croissances comparées,  $n^2 a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Ainsi  $a_n = o(\frac{1}{n^2})$  ce qui montre que  $\sum a_n$  converge, sans utiliser le critère de d'Alembert.

**Remarque.** La formule de Stirling s'écrit aussi  $n! = \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n (1 + o(1))$ , donc  $\sum_{k=1}^n \ln k = \ln(n!) = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + o(1)$ .



### 3 Les séries alternées

#### 3.1 Le théorème des séries alternées

**Définition.** On appelle série alternée toute série réelle de la forme  $\sum (-1)^n \alpha_n$  ou  $\sum (-1)^{n+1} \alpha_n$ , où pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_n \in \mathbb{R}_+$ .

**Remarque.** Dans le cas d'une série alternée,  $a_k$  et  $a_{k+1}$  sont de signes opposés, donc dans la somme partielle  $\sum_{k=0}^n a_k$ , chaque terme est compensé par le suivant. C'est pourquoi on peut s'attendre à une condition assez faible pour garantir la convergence d'une série alternée.

**Théorème des séries alternées.**

Soit  $\sum a_n$  une série alternée telle que la suite  $(|a_n|)$  est décroissante et tend vers 0. Alors  $\sum a_n$  est convergente.

De plus, en cas de convergence, pour tout  $(n, N) \in \mathbb{N}^2$  avec  $N \geq n$ , la quantité  $\sum_{k=n}^N a_k$  est du signe de son premier terme (qui est  $a_n$ ) et a un module inférieur ou égal au module de son premier terme.

◇ C'est encore vrai lorsque  $N = +\infty$ , donc pour tout  $n \in \{-1\} \cup \mathbb{N}$ , le reste de Cauchy  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$  est du signe de son premier terme (qui est  $a_{n+1}$ ) et,

pour tout  $n \in \{-1\} \cup \mathbb{N}$ ,  $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \right| \leq |a_{n+1}|$ .

**Démonstration.**

• On se limite au cas où  $\sum a_n = \sum (-1)^n |a_n|$  car, en multipliant par  $-1$ , le cas où  $\sum a_n = \sum (-1)^{n+1} |a_n|$  s'en déduit facilement.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$  (en convenant que  $A_{-1} = 0$ ).

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .  $A_{2n+2} - A_{2n} = |a_{2n+2}| - |a_{2n+1}| \leq 0$ , car la suite  $(|a_k|)$  est décroissante. Ainsi la suite  $(A_{2n})$  est une suite décroissante. De même on montre que la suite  $(A_{2n+1})$  est croissante. De plus  $A_{2n+1} - A_{2n} = -|a_{2n+1}| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc les suites  $(A_{2n})$  et  $(A_{2n+1})$  sont adjacentes. Ainsi elles admettent une limite commune que nous noterons  $A$ . On a prouvé que  $A_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A$ , donc la série  $\sum a_n$  est convergente.

• De plus, la suite décroissante  $(A_{2n})$  est supérieure à  $A$  et la suite croissante  $(A_{2n+1})$  est inférieure à  $A$ .

Ainsi, pour tout  $n \geq 0$ ,  $A_0 \geq A_{2n} \geq A_{2n+1} \geq A_1 = |a_0| - |a_1| \geq 0$ , donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_0 \geq A_n \geq 0$ .

Ainsi, en regroupant les cas où  $\sum_n a_n = \sum (-1)^n |a_n|$  et où  $\sum a_n = \sum (-1)^{n+1} |a_n|$ , on vient de montrer que la quantité  $\sum_{k=0}^n a_k$  est du signe de son premier terme (qui est  $a_0$ ) et a un module inférieur ou égal au module de son premier terme.

- Soit  $(n, N) \in \mathbb{N}^2$  avec  $N \geq n$ .  $\sum_{k=n}^N a_k = \sum_{k=0}^{N-n} a_{k+n}$  est la somme partielle d'une série spéciale alternée, donc elle est du signe de son premier terme (qui est  $a_n$ ) et a un module inférieur ou égal au module de son premier terme.
- La propriété précédente, pour  $n$  fixé, est vraie pour tout  $N \geq n$ , donc en faisant tendre  $N$  vers  $+\infty$ , on en déduit la propriété pour les restes de Cauchy.  $\square$

**Remarque.** La réciproque de ce théorème est fautive, c'est-à-dire qu'une série alternée  $\sum a_n$  peut converger sans que la suite  $(|a_n|)$  ne soit décroissante. On est par exemple dans cette situation lorsque  $a_{2n} = \frac{1}{n^2}$  et  $a_{2n+1} = -2a_{2n}$ . En effet,  $|a_{2n+1}| > |a_{2n}|$ , donc la suite  $(|a_n|)$  n'est pas décroissante, mais  $\sum_{n \geq 2} a_n$  converge car elle est même absolument convergente. En effet, pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{n=2}^{2N} |a_n| = \sum_{n=1}^N |a_{2n}| + \sum_{n=1}^{N-1} |a_{2n+1}| \leq 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ .

**Exemple.** Nature de  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ .

Si  $\alpha > 1$ , la série est absolument convergente.

Si  $\alpha \leq 0$ , la série diverge grossièrement.

Si  $\alpha \in ]0, 1]$ , comme la suite de terme général  $\frac{1}{n^\alpha}$  est décroissante et tend vers 0, on peut appliquer le théorème des séries alternées, donc la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$  est semi-convergente.

**Exemple.** Nature de  $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ .

$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ , donc  $\left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} \right| \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$  et la série n'est pas absolument convergente.

Cependant,  $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left( 1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right)$ .

Ainsi  $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ .

Mais  $\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ , donc la série  $\sum_{n \geq 1} \left( -\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)$  est divergente, et  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  est semi-

convergente d'après l'exemple précédent. Ainsi la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$  est divergente,

alors qu'elle est équivalente au terme général d'une série convergente.

### 3.2 Non commutativité des séries semi-convergentes.

Considérons la série harmonique alternée  $\sum_{n \geq 1} u_n$ , où  $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ .

◇  $\sum u_n$  converge et  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = -\ln 2$  : démonstration au tableau.

◇ On décide de sommer les termes de la suite  $(u_n)$  dans l'ordre suivant :  $u_2, u_4, u_1, u_6, u_8, u_3, u_{10}, u_{12}, u_5, \dots$ . Appelons  $(w_n)_{n \geq 1}$  cette nouvelle suite. Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $w_{3n+1} = u_{4n+2}$ ,  $w_{3n+2} = u_{4n+4}$ , et  $w_{3n+3} = u_{2n+1}$ .

◇ Posons  $S_N = \sum_{k=1}^{3N} w_k$ .

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{k=0}^{N-1} (w_{3k+1} + w_{3k+2} + w_{3k+3}) = \sum_{k=0}^{N-1} \left( \frac{1}{4k+2} + \frac{1}{4k+4} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \left( \frac{1}{4k+4} - \frac{1}{4k+2} \right) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2k+1}. \end{aligned}$$

Posons  $T_N = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}$ . On sait que  $T_N = \ln N + \gamma + o(1)$ , où  $\gamma$  désigne la constante d'Euler. Ainsi,

$$\begin{aligned} S_N &= \frac{1}{4} T_N - \frac{1}{2} \left( T_{2N} - \sum_{k=1}^N \frac{1}{2k} \right) \\ &= \frac{1}{2} T_N - \frac{1}{2} T_{2N} \\ &= \frac{1}{2} (\ln N + \gamma + o(1)) - \frac{1}{2} (\ln(2N) + \gamma + o(1)) = -\frac{1}{2} \ln(2) + o(1). \end{aligned}$$

Ainsi  $S_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} \ln(2)$ . De plus,  $w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ,

$$\text{donc } \sum_{k=1}^{3N+1} w_k = S_N + w_{3N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} \ln(2)$$

$$\text{et de même, on montre que } \sum_{k=1}^{3N+2} w_k \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} \ln(2).$$

Ceci prouve que  $\sum w_k$  converge et que  $\sum_{k=1}^{+\infty} w_k \neq \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ .

Pourtant les suites  $(u_n)$  et  $(w_n)$  possèdent les mêmes termes, mais dans un ordre différent. Ainsi, lorsque le nombre de termes que l'on somme est infini, la sommation n'est plus commutative.

◇ On peut démontrer un résultat (hors programme) beaucoup plus général ; si  $\sum a_n$  est une série semi-convergente (c'est-à-dire convergente mais non absolument conver-

gente) de réels, pour tout  $l \in \mathbb{R}$ , il existe une bijection  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $\sum a_{\sigma(n)}$  converge et a pour somme  $l$ .

◇ On peut également démontrer que, lorsque  $\sum a_n$  est une série absolument convergente, pour toute bijection  $\sigma$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $\sum a_{\sigma(n)}$  est aussi absolument convergente

$$\text{et } \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

### 3.3 La transformation d'Abel (hors programme)

**Propriété. Hors programme** Soit  $(a_n)$  une suite de complexes et  $(x_n)$  une suite de vecteurs. On dispose de la formule suivante, appelée transformation d'Abel : en posant

$$X_n = \sum_{k=0}^n x_k, \text{ pour tout } (p, q) \in \mathbb{N}^2 \text{ avec } p \leq q,$$

$$\sum_{n=p}^q a_n x_n = a_q X_q - a_p X_{p-1} - \sum_{n=p}^{q-1} (a_{n+1} - a_n) X_n.$$

**Démonstration.**

$$\begin{aligned} \sum_{n=p}^q a_n x_n &= \sum_{n=p}^q a_n (X_n - X_{n-1}) = \sum_{n=p}^q a_n X_n - \sum_{n=p-1}^{q-1} a_{n+1} X_n \\ &= \sum_{n=p}^{q-1} (a_n - a_{n+1}) X_n + a_q X_q - a_p X_{p-1}. \end{aligned}$$

□

**Remarque.** Cette formule ressemble fort à de l'intégration par parties si l'on assimile la suite  $(a_{n+1} - a_n) = \left(\frac{a_{n+1} - a_n}{(n+1) - n}\right)$  à "la dérivée" de la suite  $(a_n)$  et la suite  $(X_n)$  à "la primitive" de la suite  $(x_n)$ .

**Propriété. Hors programme : théorème d'Abel.**

Soient  $(a_n)$  une suite décroissante de réels qui tend vers 0 et  $\sum x_n$  une série de vecteurs dont les sommes partielles sont bornées.

Alors la série  $\sum a_n x_n$  converge.

**Démonstration.**

On va montrer que  $\sum a_n x_n$  vérifie le critère de Cauchy.

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in \mathbb{N}^*$ . D'après la transformation d'Abel,

$$\left\| \sum_{k=1}^p a_{n+k} x_{n+k} \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k x_k \right\| = \left\| a_{n+p} X_{n+p} - a_{n+1} X_n - \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_{k+1} - a_k) X_k \right\|.$$

Il existe  $M > 0$  tel que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\|X_k\| \leq M$ .

De plus  $a_{k+1} - a_k \leq 0$ , car la suite  $(a_n)$  est décroissante, donc

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^p a_{n+k} x_{n+k} \right\| &\leq a_{n+p} M + a_{n+1} M + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) M \\ &= M(a_{n+p} + a_{n+1} + a_{n+1} - a_{n+p}) = 2M a_{n+1}. \end{aligned}$$

Or  $a_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,  $2M a_{n+1} \leq \varepsilon$ . Ainsi,

$$\text{pour tout } n \geq N \text{ et } p \in \mathbb{N}^*, \left\| \sum_{k=1}^p a_{n+k} x_{n+k} \right\| \leq \varepsilon. \quad \square$$

**Remarque.** Les sommes partielles de la série  $\sum (-1)^n$  sont bornées, donc le théorème des séries alternées est un cas particulier du théorème d'Abel.

**Exemple.** Nature de la série  $\sum \frac{e^{i\beta n}}{n^\alpha}$ , où  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ .

**Solution.**  $\left| \frac{e^{i\beta n}}{n^\alpha} \right| = \frac{1}{n^\alpha}$ , donc la série de l'énoncé est absolument convergente si et seulement si  $\alpha > 1$ .

De plus, lorsque  $\alpha \leq 0$ ,  $\frac{1}{n^\alpha}$  ne tend pas vers 0, donc la série de l'énoncé diverge grossièrement.

Supposons maintenant que  $\alpha \in ]0, 1]$ . Posons  $x_n = e^{i\beta n}$  et  $X_n = \sum_{k=1}^n x_k$ .

Si  $\beta \in 2\pi\mathbb{Z}$ ,  $x_n = 1$  et la série de l'énoncé est une série de Riemann divergente.

Supposons maintenant que  $\beta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ .

$$X_n = \sum_{k=1}^n (e^{i\beta})^k = \frac{e^{i\beta} - e^{i\beta(n+1)}}{1 - e^{i\beta}}, \text{ donc } |X_n| \leq \frac{2}{|1 - e^{i\beta}|}. \text{ Ainsi, la suite } (X_n) \text{ est bornée}$$

et d'après le théorème d'Abel, la série de l'énoncé est semi-convergente.