MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 13 : du lundi 22 janvier au vendredi 26.

Liste des questions de cours

1°) Montrer qu'une intersection quelconque de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

2°) Si A une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, précisez les éléments de $\text{Vect}(A)$, en justifiant.

3°) Montrer que $L(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

4°) Décrire les formes linéaires de $\mathbb{K}^n$.

5°) Si u et v sont deux endomorphismes qui commutent, montrer que $Im(u)$ et $Ker(u)$ sont stables par v.

6°) On considère l'équation suivante en l'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$; $(E) \ : \ P(X+1) - P(X) = 2X + 1$. Montrer que (E) est une équation linéaire puis la résoudre.

7°) Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, montrer que $L(E)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

8°) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in GL(E)$. Montrer que $w \longmapsto uwu^{-1}$ est un automorphisme de l'algèbre $L(E)$.

9°) Enoncer et démontrer le théorème de la base incomplète.

10°) $\dim(E_1 \times \cdots \times E_n) = ?$: énoncé et démonstration.

11°) Si $e = (e_i)_{i \in I}$ est une base de E et $f = (f_i)_{i \in I} \in F^I$, montrer qu'il existe une unique application linéaire $u \in L(E, F)$ telle que $u(e_i) = f_i$ et donner une CNS portant sur (f_i) pour que u soit injective (resp : surjective).

12°) Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre et B une sous-algèbre de A de dimension finie. Soit $b \in B$. Montrer que si b est inversible dans A, alors $b^{-1} \in B$.

Thème de la semaine : les espaces vectoriels

Il s'agit du premier chapitre d'algèbre linéaire. Ainsi, les notions suivantes ne sont pas maîtrisées par les élèves, voire complètement inconnues des élèves :

- **Les matrices ;**
- rang d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire ;
- théorie des systèmes linéaires (ils savent cependant résoudre des systèmes linéaires simples) ;
- projecteurs et symétries.
- Trace d'un endomorphisme ;
- hyperplans et dualité ;
- les déterminants ;
- la théorie de la réduction.

1 La structure algébrique d'espace vectoriel

Notation. $\mathbb{K}$ désigne un corps quelconque.

1.1 Définition et exemples

Vecteurs et scalaires.
Exemples : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, E^I, sur-corps de $\mathbb{K}$, produit d'espaces vectoriels.

Sous-espaces vectoriels.

1.2 Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Une intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

$\mathrm{Vect}(A) = \left\{ \sum_{a \in A} \alpha_a a / (\alpha_a)_{a \in A} \in \mathbb{K}^{(A)} \right\}$.

Droite vectorielle.

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors $\mathrm{Vect}(x_i)_{i \in I}$ n'est pas modifié si l'on effectue l'une des *opérations élémentaires* suivantes :

- échanger x_{i_0} et x_{i_1}, où $i_0, i_1 \in I$ avec $i_0 \neq i_1$;
- multiplier x_{i_0} par $\alpha \in \mathbb{K}$ avec $\alpha \neq 0$;
- ajouter à l'un des x_i une combinaison linéaire des autres x_j.

Somme de p sous-espaces vectoriels.

Somme directe de p sous-espaces vectoriels (seulement la définition, aucun développement pour le moment).

1.3 Les applications linéaires

Morphisme, isomorphisme, endomorphisme, automorphisme, forme linéaire.

Dual de E : $E^* = L(E, \mathbb{K})$.

Si u est linéaire, $u\Big(\mathrm{Vect}(x_i)_{i \in I}\Big) = \mathrm{Vect}(u(x_i))_{i \in I}$.

Composée de deux applications linéaires.
Isomorphisme réciproque.

$L(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Sous-espace stable par un endomorphisme, endomorphisme induit.

Images directe et réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire.

Noyau et image d'une application linéaire.

Si u et v sont deux endomorphismes qui commutent, alors $Im(u)$ et $Ker(u)$ sont stables par v.

$uv = 0 \Longleftrightarrow Im(v) \subset Ker(u)$.

Équation linéaire (E) : $f(x) = y$ en l'inconnue $x \in E$, où $f \in L(E, F)$ et $y \in F$.
Equation homogène associée : l'ensemble des solutions est $\mathrm{Ker}(f)$.
(E) est compatible si et seulement si $y \in \mathrm{Im}(f)$. Dans ce cas, la solution générale de (E) s'obtient en ajoutant à une solution particulière de (E) la solution générale de (H).

1.4 Espaces affines

Si A et B sont deux points d'un $\mathbb{K}$-espace affine, $\overrightarrow{AB} = B - A$ est l'unique vecteur x tel que $A + x = B$.
Relation de Chasles.
Définition d'un parallélogramme.

Si l'on fixe un point d'un espace affine $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}$ possède naturellement une srructure d'espace vectoriel.
Réciproquement, tout espace vectoriel possède une structure naturelle d'espace affine.

1.5 La structure d'algèbre

Algèbre commutative ou non commutative, intègre ou non intègre.
Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors $(L(E), +, ., \circ)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.
Le groupe des inversibles de $L(E)$ est noté $(GL(E), \circ)$.

Sous-algèbres.

morphismes d'algèbres.

Automorphismes intérieurs.

Composition de morphismes d'algèbres, isomorphisme réciproque, images directe et réciproque d'une sous-algèbre.

2 Familles de vecteurs

Notation. E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , où $\mathbb{K}$ est un corps quelconque.

2.1 Familles libres et génératrices

Familles libres, liées, génératrices, bases.
Coordonnées d'un vecteur dans une base.

2.2 Dimension d'un espace vectoriel

Définition. E est de dimension finie si et seulement si il possède une famille génératrice finie.

Lemme : Toute famille $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ de $n + 1$ vecteurs de $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$ est liée.

Théorème de la base incomplète.
Famille libre maximale.

Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie.
Si $\dim(E) = n$, e est une base de E si et seulement si e est libre et de cardinal n, ou encore si et seulement si e est génératrice et de cardinal n.

Si $F \subset G$, $\dim(F) \leq \dim(G)$, avec égalité si et seulement si $F = G$.

$\dim(E_1 \times \cdots \times E_n) = \dim(E_1) + \cdots + \dim(E_n)$.

2.3 Exemples

Base canonique de $\mathbb{K}^{(I)}$.

Dans $\mathbb{K}^2$, deux vecteurs forment une base si et seulement si leur déterminant est non nul.

2.4 Application linéaire associée à une famille de vecteurs

Si $x = (x_i) \in E^I$, on note $\begin{array}{rccc} \Psi_x : & \mathbb{K}^{(I)} & \longrightarrow & E \\ & (\alpha_i)_{i\in I} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i\in I} \alpha_i x_i \end{array}$.

x est une famille libre (resp : génératrice) si et seulement si Ψ_x est injective (resp : surjective).
Si $e = (e_i)_{i\in I}$ est une base de E, alors E est isomorphe à $\mathbb{K}^{(I)}$.

2.5 Image d'une famille par une application linéaire

Notation. Si $u \in L(E, F)$ et $x = (x_i)_{i\in I} \in E^I$, on notera $(u(x_i))_{i\in I} = u(x)$. Alors $\Psi_{u(x)} = u \circ \Psi_x$.
Image d'une famille libre (resp : génératrice) par une injection (resp : surjection) linéaire.

Deux espaces de dimensions finies ont la même dimension si et seulement si ils sont isomorphes.
$\dim(u(G)) \leq \dim(G)$, avec égalité lorsque u est injective.

Théorème. Si $e = (e_i)_{i\in I}$ est une base de E et $f = (f_i)_{i\in I} \in F^I$, il existe une unique application linéaire $u \in L(E, F)$ telle que $u(e_i) = f_i$. CNS portant sur (f_i) pour que u soit injective (resp : surjective).

Soit $u \in L(E, F)$ avec $\dim(E) = \dim(F)$, alors u injective $\iff$ u surjective $\iff$ u bijective.
Si E admet une base $(e_i)_{i\in I}$, alors $L(E, F)$ est isomorphe à F^I.
$\dim(L(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$.

Prévisions pour la semaine prochaine :

Équations différentielles linéaires.