Résumé de cours :
Semaine 16, du 15 janvier au 19

Les équations différentielles (fin)

1 Équations différentielles linéaires d'ordre 2

1.1 Équations à coefficients quelconques (fin)

Cas particulier où on connaît une solution φ_1 de (H) ne s'annulant pas sur I : on pose $y(x) = \lambda(x)\varphi_1(x)$. Alors (E) est équivalente à une équation linéaire d'ordre 1 en λ .
Il faut savoir le démontrer.

1.2 Equations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Ici, $(E) : y'' + ay' + by = f(x)$, où $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est continue, et où a et b sont des constantes. L'équation homogène associée est $(H) : y'' + ay' + by = 0$.

1.2.1 Résolution de (H) : **Il faut savoir le démontrer.**

$\chi = X^2 + aX + b$ est appelé le polynôme caractéristique de (H) ou de (E) .

- *Premier cas.* Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\Delta = a^2 - 4b \neq 0$ ou bien si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta > 0$.

Dans ce cas, χ admet deux racines distinctes dans $\mathbb{K}$, notées λ et μ .

Alors $(H) \iff \exists(u, v) \in \mathbb{K}^2 \forall x \in \mathbb{R} y(x) = ue^{\lambda x} + ve^{\mu x}$.

- *Second cas.* Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta > 0$. Alors $\lambda = \alpha + i\beta$ et $\mu = \alpha - i\beta$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et

$(H) \iff \exists(u, v) \in \mathbb{R}^2 \forall x \in \mathbb{R} y(x) = ue^{\alpha x} \cos \beta x + ve^{\alpha x} \sin \beta x$.

- *Troisième cas.* Si $\Delta = 0$: χ admet une racine double notée λ .

Alors $(H) \iff \exists(u, v) \in \mathbb{K}^2 \forall x \in \mathbb{R} y(x) = e^{\lambda x}(u + xv)$.

1.2.2 Résolution de l'équation avec second membre

Théorème. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ et un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ tels que $\forall x \in I \quad f(x) = e^{\lambda x}P(x)$. Alors (E) admet une solution particulière de la forme $x \mapsto Q(x)e^{\lambda x}$, où Q est une application polynomiale.

Plus précisément, (E) admet sur I une solution particulière de la forme $x \mapsto x^m e^{\lambda x} Q(x)$ où Q est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de même degré que P , avec $m = 0$ lorsque λ n'est pas racine de χ , avec $m = 1$ lorsque λ est une racine simple de χ et avec $m = 2$ lorsque λ est une racine double de χ .

Remarque. Ce théorème est aussi valable pour les équations différentielles de la forme $(E) : y' + by = e^{\lambda x}P(x)$ où $P \in \mathbb{K}[X]$: (E) admet sur I une solution particulière de la forme $x \mapsto Q(x)e^{\lambda x}$, où Q est une application polynomiale.

Plus précisément, (E) admet une solution particulière de la forme $x \mapsto x^m e^{\lambda x} Q(x)$ où Q est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de même degré que P , avec $m = 0$ lorsque $\lambda \neq -b$ et $m = 1$ lorsque $\lambda = -b$ (dans ce cas, $\chi = X + b$).

Remarque. Lorsque $f(x)$ est de la forme $f(x) = P(x) \cos(\omega x)$ où $\omega \in \mathbb{R}$, ou bien de la forme $f(x) = P(x) \sin(\omega x)$, on peut appliquer ce qui précède en se ramenant à $x \mapsto P(x) e^{i\omega x}$.

Remarque. Plus généralement, lorsque $f(x)$ est de la forme $P(x) e^{Q(x)}$, où P et Q sont des polynômes, on peut chercher une solution particulière de la forme $H(x) e^{Q(x)}$, où H est aussi un polynôme.

2 Equations à variables séparables (hors programme)

2.1 Equations à variables séparées

Notation.

Soient I et K deux intervalles infinis et soient $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $b : K \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications continues. L'équation différentielle $(E) : a(t) - b(y)y' = 0$ est appelée une équation est à variables séparées.

Si A et B sont des primitives de a et de b respectivement,

$(E) \iff \frac{d(A(t) - B(y(t)))}{dt} = 0$, donc les courbes intégrales de (E) ont pour équations cartésiennes $A(x) = B(y) + C$, où $C \in \mathbb{R}$.

En pratique, on écrira $(E) \iff a(t)dt = b(y)dy \iff A(t) = B(y) + C$.

2.2 Cas général

Notation. Soient I et K deux intervalles infinis. Soient a et d deux applications continues de I dans $\mathbb{R}$ et b et c deux applications continues de K dans $\mathbb{R}$. L'équation $(E) : a(t)c(y) - b(y)d(t)y' = 0$ est appelée une équation est à variables séparables.

En divisant par $c(y)$ et $d(t)$ on se ramène à une équation à variables séparées.

• Plus précisément, soit $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable. Quitte à restreindre l'intervalle I , on supposera que d ne s'annule pas sur I . Ainsi $(E) \iff \frac{a(t)}{d(t)}c(y) - y'b(y) = 0$.

Il faudra ensuite étudier les possibles raccordements des solutions en chaque zéro de d .

• Si $y_0 \in K$ est un zéro de c , l'application constante $y = y_0$ est une solution de (E) . Ainsi chaque zéro de c fournit une solution particulière.

On suppose ensuite que $\forall t \in I \ c(y(t)) \neq 0$. Alors $(E) \iff \frac{a(t)}{d(t)} - y' \frac{b(y)}{c(y)} = 0$: c'est une équation à variables séparées, donc on est ramené au a). Il reste ensuite à étudier les possibles recollements de ces dernières solutions avec les solutions particulières $y = y_0$ où y_0 est un zéro de c .