DM 18 : Un corrigé

Partie I : Isomorphismes de corps

1°) On sait d'après le cours que, $c(1) = 1$, et que pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$,
$c(z + z') = c(z) + c(z')$ et $c(zz') = c(z)c(z')$, donc c est un morphisme de corps de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. De plus, $c \circ c = Id_{\mathbb{C}}$, donc c est bijectif. Il s'agit donc d'un automorphisme du corps $\mathbb{C}$.

2°) Non car $\mathbb{Q}$ est dénombrable et $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, donc il n'existe aucune bijection entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ et a fortiori aucun isomorphisme de corps.

3°) Soit f un automorphisme de $\mathbb{Q}$.
f est en particulier un morphisme de groupes additifs, donc d'après le cours, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{Q}$, $f(nx) = nf(x)$. On le démontre par récurrence sur n à x fixé lorsque $n \in \mathbb{N}$, puis on le prouve pour $n \in \mathbb{Z}$, en utilisant que $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$.
Soit $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Alors $qf(\frac{p}{q}) = f(q\frac{p}{q}) = f(p) = pf(1) = p$, car $f(1) = 1$, donc $f(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q}$.
Ainsi, $f = Id_{\mathbb{Q}}$.
Réciproquement, il est connu que $Id_{\mathbb{Q}}$ est un automorphisme de corps.

4°) Soit f un automorphisme de $\mathbb{R}$.
La preuve de la question 3 restant valable, on montre que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = x$.
De plus f est croissante, car si $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x \leq y$, alors $0 \leq y - x$, donc
$f(y - x) = f(\sqrt{y - x}^2) = f(\sqrt{y - x})^2 \geq 0$, puis $f(y) \geq f(x)$.
Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $a, b \in \mathbb{Q}$ tels que $x - \frac{1}{n} \leq a \leq x \leq b \leq x + \frac{1}{n}$. Alors par croissance de f, $a = f(a) \leq f(x) \leq f(b) = b$, donc $|f(x) - x| \leq \frac{1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que $f(x) = x$. Ainsi, $f = Id_{\mathbb{R}}$ et la réciproque est claire.

5°) $\diamond$ Montrons que $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$. En effet, $1 \in \mathbb{K}$ et si $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$,
$(a + b\sqrt{2}) - (c + \sqrt{2}d) = (a - c) + \sqrt{2}(b - d) \in \mathbb{K}$
et $(a + b\sqrt{2})(c + \sqrt{2}d) = (ac + 2bd) + \sqrt{2}(bc + ad) \in \mathbb{K}$.
Supposons de plus que $a + b\sqrt{2} \neq 0$, alors $b \neq 0$ (sinon $\sqrt{2} = -\frac{a}{b}$ serait rationnel), donc $a - b\sqrt{2} \neq 0$ (sinon, $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ serait rationnel). Ainsi, on peut écrire que
$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2})} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} \in \mathbb{K}.$$
Ainsi, $\mathbb{K}$ est bien un corps.
$\diamond$ Soit f un automorphisme du corps $\mathbb{K}$.

Alors $f(\sqrt{2})^2 = f(\sqrt{2}^2) = f(2) = f(1+1) = 2f(1) = 2$, donc il existet $\varepsilon \in \{-1,1\}$ tel que $f(\sqrt{2}) = \varepsilon\sqrt{2}$. De plus, en adaptant la preuve de la question 3, on a encore que $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$. Alors, pour tout
$a, b \in \mathbb{Q}$, $f(a+\sqrt{2}b) = f(a) + f(\sqrt{2})f(b) = a + \varepsilon\sqrt{2}b$.
Réciproquement, lorsque $f = (a + b\sqrt{2}) \longmapsto (a + \varepsilon\sqrt{2}b)$, avec $\varepsilon \in \{-1,1\}$, on vérifie que f est bien un automorphisme de corps. En effet, lorsque $\varepsilon = 1$, c'est l'application identité. Supposons maintenant que $\varepsilon = -1$. On vérifie alors que pour tout $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, $f((a+b\sqrt{2}) + (c+\sqrt{2}d)) = (a+c) - \sqrt{2}(b+d) = f(a+b\sqrt{2}) + f(c+\sqrt{2}d)$ et $f((a+b\sqrt{2})(c+\sqrt{2}d)) = (ac+2bd) - \sqrt{2}(bc+ad) = f(a+b\sqrt{2}) \times f(c+\sqrt{2}d)$.
De plus $f(1) = 1$ et f est involutive, donc c'est bien un automorphisme.

Partie II : Applications semi-linéaires

6°) La question a bien un sens car c est un isomorphisme du corps $\mathbb{C}$ dans lui-même et que $\mathbb{C}^2$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.
Alors $f\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right] = f\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{x} + \overline{x'} + \overline{y} + \overline{y'} \\ \overline{x} + \overline{x'} - \overline{y} - \overline{y'} \end{pmatrix}$.
Donc $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{x} + \overline{y} \\ \overline{x} - \overline{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{x'} + \overline{y'} \\ \overline{x'} - \overline{y'} \end{pmatrix} = f\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right]$.
Soit de plus $\lambda \in \mathbb{C}$. $f\left[\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = f\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\lambda x} + \overline{\lambda y} \\ \overline{\lambda x} - \overline{\lambda y} \end{pmatrix} = c(\lambda) f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, ce qu'il fallait démontrer.

7°) *Analyse :* Supposons que f est une application c-linéaire de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}$.
Notons $d = (d_1, \dots, d_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Pour tout $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$,
$f(x) = f(\sum_{i=1}^n x_i d_i) = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} f(d_i)$, d'après la c-linéarité de f. Ainsi, f est de la forme $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \sum_{i=1}^n \overline{x_i}\alpha_i$, où $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$.

Synthèse : Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. On note f l'application $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \sum_{i=1}^n \overline{x_i}\alpha_i$. On vérifie aisément, en adaptant la question précédente, que f est une application c-linéaire de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}$.

8°) $\diamond$ Soit A un sous-espace vectoriel de E. A est non vide, donc $f(A)$ est non vide. Soit $x, y \in f(A)$ et $\lambda \in \mathbb{L}$. Il existe $a, b \in A$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ tels que $x = f(a)$, $y = f(b)$ et $\lambda = \sigma(\alpha)$, donc $\lambda x + y = \sigma(\alpha)f(a) + f(b) = f(\alpha a + b) \in f(A)$, car A étant un

sous-espace vectoriel de E, $\alpha a + b \in A$. Ainsi, $f(A)$ est bien un sous-espace vectoriel de F.
$\diamond$ Soit B un sous-espace vectoriel de F. Soit $a, b \in f^{-1}(B)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
Alors $f(\alpha a + b) = \sigma(\alpha)f(a) + f(b) \in B$, car $f(a), f(b) \in B$, $\sigma(\alpha) \in \mathbb{L}$ et B est un sous-espace vectoriel de F. Ainsi, $\alpha a + b \in f^{-1}(B)$.
De plus $f(0) = 0$, car f est un morphisme de groupes additifs, donc $f(0) \in B$, puis $0 \in f^{-1}(B)$, ce qui prouve que $f^{-1}(B)$ est non vide. On a alors montré que $f^{-1}(B)$ est un sous-espace vectoriel de E.

9°) Notons n la dimension de E. Il existe une base de E, que l'on note $e = (e_1, \ldots, e_n)$. Montrons que $f(e) = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base de F, ce qui prouvera bien que F est aussi de dimension finie et que $\dim(F) = \dim(E)$.

Soit $y \in F$. Il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $f^{-1}(y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$,

donc $y = f(f^{-1}(y)) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sigma(\alpha_i) f(e_i)$. Ceci montre que $f(e)$ est génératrice de F.

Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{L}^n$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0$. Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, il existe $\alpha_i \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda_i = \sigma(\alpha_i)$. Alors $f(0) = 0 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) = f\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\Big)$, mais f est injective, donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0$. or e est une base, donc pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $\alpha_i = 0$, puis $\lambda_i = \sigma(\alpha_i) = 0$. Ainsi, $f(e)$ est également libre, ce qui conclut.

Partie III : Projectivités

10°) Notons g l'application $A \longmapsto f(A)$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$. D'après la question 8, si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $f(A)$ est un sous-espace vectoriel de F, donc g est bien définie en tant qu'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$.
L'application $B \longmapsto f^{-1}(B)$ de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{E}$ est bien définie d'après la question 8, et on sait que lorsque f est bijective, pour tout $A \subset E$ et $B \subset F$, $f(f^{-1}(B)) = B$ et $f^{-1}(f(A)) = A$, donc g est une bijection dont l'application réciproque est $B \longmapsto f^{-1}(B)$ de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{E}$.
Si $A, B \in \mathcal{E}$, avec $A \subset B$, il est connu que $f(A) \subset f(B)$ (pour une application f quelconque de E dans F), donc g est croissante pour l'inclusion. On montre de même que sa bijection réciproque est croissante, donc g est une projectivité.

11°) Pour tout $x \in X$, $x \leq \sup(X)$, or f est croissante, donc $f(x) \leq f(\sup(X))$. Ainsi, $f(\sup(X))$ majore $f(X)$, donc par définition de la borne supérieure,
$\sup(f(X)) \leq f(\sup(X))$. Appliquons maintenant ce résultat à l'application f^{-1}, qui vérifie les mêmes hypothèses que f, en remplaçant X par $f(X)$. On obtient que

$\sup(f^{-1}(f(X))) \leq f^{-1}(\sup(f(X)))$, donc en composant par f, qui est croissante, on obtient que $f(\sup(X)) \leq \sup(f(X))$, ce qui fournit l'inégalité réciproque.

12°) Posons $\mathcal{A} = \{A_i \ / \ i \in I\}$. Dans l'ensemble ordonné $(\mathcal{E}, \subset)$, on sait que $\bigcap_{i \in I} A_i$ est la borne inférieure de $\mathcal{A}$. En effet, cette intersection est bien un minorant de $\mathcal{A}$ et si B est un minorant de $\mathcal{A}$, il est inclus dans tous les A_i, donc il est plus petit que cette intersection. On sait également que $\bigcap_{i \in I} f(A_i)$ est la borne inférieure de
$f(\mathcal{A}) = \{f(A_i) \ / \ i \in I\}$, or la question précédente est encore valable avec des bornes inférieures, ou bien en adaptant la démonstration, ou bien en appliquant la question précédente aux ensembles ordonnés $(A, \geq_A)$ et $(B, \geq_B)$,
donc $f\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) = f(\inf(\mathcal{A})) = \inf(f(\mathcal{A})) = \bigcap_{i \in I} f(A_i)$.

13°) $\sum_{i=1}^{n} A_i$ est la borne supérieure dans $(\mathcal{E}, \subset)$ de $\mathcal{A} = \{A_i \ / \ i \in I\}$. En effet, c'est bien un majorant de $\mathcal{A}$, car $\sum_{i=1}^{n} A_i$ contient tous les A_i. De plus, si B est un élément de $\mathcal{E}$ qui contient tous les A_i, c'est un sous-espace vectoriel qui contient $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, donc qui contient $\mathrm{Vect}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} A_i$. On conclut alors comme en question 12 grâce à la question 11.

Partie IV : les projectivités conservent la dimension

14°) f étant bijective, notons $A = f^{-1}(\{0_F\})$. A est un sous-espace vectoriel de E, donc $\{0_E\} \subset A$. Or f est croissante, donc $f(\{0_E\}) \subset f(A) = \{0_F\}$. L'autre inclusion étant évidente car $f(\{0_E\})$ est un sous-espace vectoriel de F, on a montré que $f(\{0_E\}) = \{0_F\}$.

15°) $\diamond$ Supposons que A est une droite, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de E de dimension 1. Soit $B \in \mathcal{E}$ tel que $B \neq \{0\}$ et $B \subset A$. Alors B est aussi un sous-espace vectoriel de dimension finie et on a $0 < \dim(B) \leq \dim(A) = 1$,
donc $\dim(B) = 1 = \dim(A)$ et $B \subset A$, donc $A = B$.
Réciproquement, supposons que $\forall B \in \mathcal{E}, \ \ [(B \neq \{0\}) \wedge (B \subset A) \Longrightarrow B = A]$.
Par hypothèse, $A \neq \{0_E\}$, or A est un sous-espace vectoriel, donc $\{0\} \subset A$, donc il existe $x \in A$ tel que $x \neq 0$. Posons $B = \mathbb{K}x$. Alors $B \neq \{0\}$ et $B \subset A$, donc d'après notre hypothèse, $A = B = \mathbb{K}x$ avec $x \neq 0$, ce qui prouve que A est une droite vectorielle.
$\diamond$ Supposons que A est une droite de E. Soit $B' \in \mathcal{F}$ tel que $B' \neq \{0_F\}$ et $B' \subset f(A)$. Posons $B = f^{-1}(B')$. D'après la question 14, $B \neq \{0\}$ (sinon on aurait

$B' = f(\{0\}) = \{0\})$ et par croissance de f^{-1}, $B \subset f^{-1}(f(A)) = A$. Donc d'après le sens direct de la sous-question précédente, $B = A$. On en déduit que $B' = f(B) = f(A)$. On a donc montré que $\forall B' \in \mathcal{F},\ \ [(B' \neq \{0\}) \wedge (B' \subset f(A)) \Longrightarrow B' = f(A)]$. On peut maintenant utiliser le sens indirect de la sous-question précédente, qui est également valable pour $\mathcal{F}$. Comme $f(A) \neq \{0\}$ d'après la question 14, on en déduit que $f(A)$ est une droite de F.

16°) $\diamond$ Supposons que la somme $\sum_{i=1}^{n} A_i$ est directe et que $A_{n+1} \bigcap \Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big) = \{0\}$.

Soit $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in A_1 \times \cdots \times A_{n+1}$ tel que $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0$.

Alors $x_{n+1} = -\sum_{i=1}^{n} x_i \in A_{n+1} \bigcap \Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big) = \{0\}$, donc $x_{n+1} = 0$. Alors $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, or la somme $\sum_{i=1}^{n} A_i$ est directe, donc pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $x_i = 0$. Ceci démontre bien que la somme $\sum_{i=1}^{n+1} A_i$ est directe.

$\diamond$ Réciproquement, supposons que la somme $\sum_{i=1}^{n+1} A_i$ est directe.

Si $(x_1, \ldots, x_n) \in A_1 \times \cdots \times A_n$ vérifie $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, alors, en posant $x_{n+1} = 0 \in A_{n+1}$, on a $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0$. Or la somme $\sum_{i=1}^{n+1} A_i$ est directe, donc pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $x_i = 0$, ce qui prouve que la somme $\sum_{i=1}^{n} A_i$ est directe.

Soit maintenant $x_{n+1} \in A_{n+1} \bigcap \Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big)$. Il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in A_1 \times \cdots \times A_n$ tel que $x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n}(-x_i)$, donc $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0$. Alors $x_{n+1} = 0$, donc on a montré que $A_{n+1} \bigcap \Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big) = \{0\}$.

$\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Notons $R(n)$ l'assertion suivante : si $A_1, \ldots, A_n$ sont n sous-espaces vectoriels de E en somme directe, alors $f(A_1), \ldots, f(A_n)$ sont aussi en somme directe et $f\Big(\bigoplus_{i=1}^{n} A_i\Big) = \bigoplus_{i=1}^{n} f(A_i)$.

Raisonnons par récurrence. Pour $n = 2$, soit $A, B \in \mathcal{E}$ tels que $A + B$ est directe. Alors $A \cap B = \{0\}$. D'après les questions 12 et 14,

$f(A) \cap f(B) = f(A \cap B) = f(\{0\}) = \{0\}$, donc $f(A) + f(B)$ est directe. Alors, d'après la question 13, on peut écrire que $f(A \oplus B) = f(A+B) = f(A) + f(B) = f(A) \oplus f(B)$.
On suppose que $n \geq 2$ et que $R(n)$ est vraie. Soit $A_1, \ldots, A_{n+1}$ $n+1$ sous-espaces vectoriels de E que l'on suppose en somme directe. Alors $A_1, \ldots, A_n$ sont en somme directe et $A_{n+1} \bigcap \Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big) = \{0\}$. On en déduit en utilisant d'une part l'hypothèse de récurrence, et d'autre part les questions 12, 13 et 14 que $f(A_1), \ldots, f(A_n)$ sont en somme directe et $f(A_{n+1}) \bigcap \Big(\sum_{i=1}^{n} f(A_i)\Big) = \{0\}$, donc que $f(A_1), \ldots, f(A_{n+1})$ sont en somme directe. On peut alors écrire $f\Big(\bigoplus_{i=1}^{n+1} A_i\Big) = f\Big(\sum_{i=1}^{n+1} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n+1} f(A_i) = \bigoplus_{i=1}^{n+1} f(A_i)$.

17°) $\diamond$ Soit $x \in A$. Il existe $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, donc $x \in \sum_{i=1}^{n} \mathbb{K}e_i$.

Ainsi, $A \subset \sum_{i=1}^{n} \mathbb{K}e_i$. L'inclusion réciproque est claire car $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset A$ et A est un sous-espace vectoriel. Il reste à montrer que cette somme est directe.
Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}e_1 \times \cdots \times \mathbb{K}e_n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tel que $x_i = \lambda_i e_i$. Alors $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$, or $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre, donc pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $\lambda_i = 0$, puis $x_i = 0$, ce qu'il fallait démontrer.
Ainsi, on a prouvé que $A = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{K}e_i$.

$\diamond$ D'après la question précédente, on en déduit que $f(A) = \bigoplus_{i=1}^{n} f(\mathbb{K}e_i)$.

Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, d'après la question 15, $f(\mathbb{K}e_i)$ est une droite vectorielle, donc $\dim(f(\mathbb{K}e_i)) = 1$, puis d'après le cours, $\dim(f(A)) = n = \dim(A)$.

18°) Supposons que $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre. Alors, en posant $A = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_p)$, d'après la question précédente, $A = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{K}x_i$ et $f(A) = \bigoplus_{i=1}^{n} f(\mathbb{K}x_i) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{L}y_i$. Alors, si $\sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i = 0$, la somme $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{L}y_i$ étant directe, on obtient que $\beta_i y_i = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, or $y_i \neq 0$ car $\mathbb{L}y_i = f(\mathbb{K}x_i)$ est une droite vectorielle, donc $\beta_i = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}_n$.
Ainsi $(y_1, \ldots, y_p)$ est libre.
De plus on remarque que, pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $f^{-1}(\mathbb{L}y_i) = \mathbb{K}x_i$, donc en remplaçant f par f^{-1} dans ce qui précède, on démontre la réciproque.

Partie V : Réciproque de la question 10

19°) $\diamond$ (x, y) est libre donc x est non nul. Ainsi $\mathbb{K}x$ est une droite, donc d'après la question 15, $f(\mathbb{K}x)$ est aussi une droite. Il existe donc $x' \in F$ tel que $x' \neq 0$ et $f(\mathbb{K}x) = \mathbb{L}x'$.
De même, (x, y) étant libre, $x - y$ est un vecteur non nul, donc il existe $t \in F$ tel que $t \neq 0$ et $f(\mathbb{K}(x - y)) = \mathbb{L}t$.
$\diamond$ $\mathbb{K}(x - y) \subset \mathbb{K}x + \mathbb{K}y$, donc $\mathbb{L}t = f(\mathbb{K}(x - y)) \subset f(\mathbb{K}x + \mathbb{K}y) = f(\mathbb{K}x) + f(\mathbb{K}y)$. Ainsi, $t \in f(\mathbb{K}x) + f(\mathbb{K}y) = \mathbb{L}x' + f(\mathbb{K}y)$. Il existe donc $g \in \mathbb{L}$ et $z \in f(\mathbb{K}y)$ tel que $t = gx' + z$.
Si $g = 0$, alors $t = z$, donc $f(\mathbb{K}(x - y)) = \mathbb{L}t = \mathbb{L}z \subset f(\mathbb{K}y)$. En composant par f^{-1}, donc obtient que $\mathbb{K}(x - y) \subset \mathbb{K}y$, donc la famille $(x - y, y)$ est liée, puis par opération élémentaire on en déduit que (x, y) est liée ce qui est faux. Ainsi, $g \neq 0$, or $\mathbb{L}$ est un corps, donc on peut poser $y' = -g^{-1}z = x' - g^{-1}t$.
Si $z = 0$, alors $t = gx'$ avec $g \neq 0$, donc $\mathbb{L}t = \mathbb{L}x'$, c'est-à-dire $f(\mathbb{K}(x - y)) = f(\mathbb{K}x)$. Alors $\mathbb{K}(x - y) = \mathbb{K}x$ et on en déduirait encore que (x, y) est lié, donc $z \neq 0$. Or $z \in f(\mathbb{K}y)$ et $f(\mathbb{K}y)$ est une droite, donc $f(\mathbb{K}y) = \mathbb{L}z$.
Ainsi, $\mathbb{L}y' = \mathbb{L}z = f(\mathbb{K}y)$ et $\mathbb{L}(x' - y') = \mathbb{L}(g^{-1}t) = \mathbb{L}t = \mathbb{K}(x - y)$, ce qu'il fallait démontrer.

20°) La question 19 montre l'existence. Montrons l'unicité.
Soit $y', y'' \in F$ tel que $f(\mathbb{K}y) = \mathbb{L}y' = \mathbb{L}y''$ et $f(\mathbb{K}(x - y)) = \mathbb{L}(x' - y') = \mathbb{L}(x' - y'')$.
Alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{L}$ tels que $y'' = \alpha y'$ et $x' - y'' = \beta(x' - y')$. On en déduit que $x' - \alpha y' = \beta x' - \beta y'$, puis que $(1 - \beta)x' + (\beta - \alpha)y' = 0$. Or (x', y') est libre d'après la question 18, car $f(\mathbb{K}x) = \mathbb{L}x'$ et $f(\mathbb{K}y) = \mathbb{L}y'$. Ainsi, $1 - \beta = \beta - \alpha = 0$. On en déduit que $\alpha = 1$, donc $y'' = \alpha y' = y'$, ce qu'il fallait démontrer.

21°) (x, y) est libre, donc également (y, x), donc les deux quantités $h(x, x', y)$ et $h(y, y', x)$ sont bien définies. Alors d'après l'unicité énoncée en question 20,

$$\begin{aligned} y' = h(x, x', y) &\iff [f(\mathbb{K}y) = \mathbb{L}y'] \wedge [f(\mathbb{K}(x - y)) = \mathbb{L}(x' - y')] \\ &\iff [f(\mathbb{K}x) = \mathbb{L}x'] \wedge [f(\mathbb{K}(y - x)) = \mathbb{L}(y' - x')], \end{aligned}$$

car les propositions $f(\mathbb{K}y) = \mathbb{L}y'$ et $f(\mathbb{K}x) = \mathbb{L}x'$ sont supposées vraies.
Ainsi, $h(x, x', y) = y' \iff h(y, y', x) = x'$.

22°) $\diamond$ $y - z \in \mathbb{K}y + \mathbb{K}z$ et $y - z = -(x - y) + (x - z) \in \mathbb{K}(x - y) + \mathbb{K}(x - z)$, donc $y - z \in (\mathbb{K}y + \mathbb{K}z) \cap (\mathbb{K}(x - y) + \mathbb{K}(x - z))$, ce qui prouve que
$\mathbb{K}(y - z) \subset (\mathbb{K}y + \mathbb{K}z) \cap (\mathbb{K}(x - y) + \mathbb{K}(x - z))$. Les mêmes arguments permettent également de montrer que $\mathbb{K}(x - y - z) \subset (\mathbb{K}(x - y) + \mathbb{K}z) \cap (\mathbb{K}(x - z) + \mathbb{K}y)$ et $\mathbb{K}(y + z) \subset (\mathbb{K}y + \mathbb{K}z) \cap (\mathbb{K}(x - y - z) + \mathbb{K}x)$.
$\diamond$ Notons $D = (\mathbb{K}y + \mathbb{K}z) \cap (\mathbb{K}(x - y) + \mathbb{K}(x - z))$. Alors $D \subset \mathbb{K}y + \mathbb{K}z$. Supposons que $D = \mathbb{K}y + \mathbb{K}z$. Alors $\mathbb{K}y + \mathbb{K}z \subset \mathbb{K}(x - y) + \mathbb{K}(x - z)$, donc il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tel que $y = \alpha(x - y) + \beta(x - z)$. Alors $(-\alpha - \beta)x + (1 + \alpha)y + \beta z = 0$, or (x, y, z) est libre, donc $0 = -\alpha - \beta = 1 + \alpha = \beta$, donc $1 = 0$, ce qui est faux. Ainsi, D est strictement inclus dans $\mathbb{K}y + \mathbb{K}z$. On en déduit que $\dim(D) < \dim(\mathbb{K}y + \mathbb{K}z) = \dim(\mathrm{Vect}(y, z)) = 2$, car

(y,z) est libre. De plus $D \supset \mathbb{K}(y-z)$ et $y-z \neq 0$, donc $\dim(D) \geq 1$. On en déduit que $\dim(D) = 1 = \dim(\mathbb{K}(y-z))$, or $D \supset \mathbb{K}(y-z)$, donc d'après le cours, $D = \mathbb{K}(y-z)$. Des arguments similaires permettent de démontrer les deux autres égalités.

23°) D'après les hypothèses, on a $f(\mathbb{K}x) = \mathbb{L}x'$, $f(\mathbb{K}y) = \mathbb{L}y'$, $f(\mathbb{K}(x-y)) = \mathbb{L}(x'-y')$, $f(\mathbb{K}z) = \mathbb{L}z'$ et $f(\mathbb{K}(x-z)) = \mathbb{L}(x'-z')$.
Pour conclure, il suffit de montrer que $f(\mathbb{K}(y-z)) = \mathbb{L}(y'-z')$, or d'après la première propriété de la question précédente et d'après les questions 12 et 13,

$$\begin{aligned} f(\mathbb{K}(y-z)) &= f[(\mathbb{K}y + \mathbb{K}z) \cap (\mathbb{K}(x-y) + \mathbb{K}(x-z))] \\ &= (f(\mathbb{K}y) + f(\mathbb{K}z)) \cap (f(\mathbb{K}(x-y)) + f(\mathbb{K}(x-z))) \\ &= (\mathbb{L}y' + \mathbb{L}z') \cap (\mathbb{L}(x'-y') + \mathbb{L}(x'-z')) \\ &= \mathbb{L}(y'-z'), \end{aligned}$$

en appliquant à nouveau la première propriété de la question précédente, dans F au lieu de E, ce qui est possible car d'après la question 18, (x', y', z') est libre.

24°) La famille $(x, y+z)$ est libre, donc $h(x, x', y+z)$ est bien définie, ainsi que $h(x, x', y)$ et $h(x, x', z)$.
Posons $y' = h(x, x', y)$ et $z' = h(x, x', z)$. On dispose donc des égalités suivantes : $f(\mathbb{K}x) = \mathbb{L}x'$, $f(\mathbb{K}y) = \mathbb{L}y'$, $f(\mathbb{K}(x-y)) = \mathbb{L}(x'-y')$, $f(\mathbb{K}z) = \mathbb{L}z'$,
et $f(\mathbb{K}(x-z)) = \mathbb{L}(x'-z')$.
On souhaite montrer que $y'+z' = h(x, x', y+z)$, c'est-à-dire que $f(\mathbb{K}(y+z)) = \mathbb{K}(y'+z')$ et $f(\mathbb{K}(x-y-z)) = \mathbb{L}(x'-y'-z')$.
On démontre d'abord la seconde relation en utilisant la seconde propriété de la question 22 selon la même méthode que celle de la question précédente. Alors on peut démontrer la première relation en utilisant la dernière propriété de la question 22.

Ce qu'admet l'énoncé est certes technique à démontrer, mais tout à fait élémentaire. Le lecteur intéressé trouvera les détails dans le livre de Reinhold Baer suivant : *Linear Algebra and Projection Geometry*, Academic Press Inc., New York, 1952.

25°) • Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ avec $\lambda \neq 0$.
◇ Soit $x \in E$ avec $x \neq 0$.
$\mathbb{L}g(\lambda x) = f(\mathbb{K}(\lambda x)) = f(\mathbb{K}x) = \mathbb{L}g(x) \neq \{0\}$, donc il existe $\alpha \in \mathbb{L} \setminus \{0\}$ tel que $g(\lambda x) = \alpha g(x)$. De plus $g(x) \neq 0$, donc α est unique. On peut noter $\alpha = \sigma(\lambda, x)$.
Ainsi, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $\sigma(\lambda, x)$ est un scalaire de $\mathbb{L}$ tel que $g(\lambda x) = \sigma(\lambda, x) g(x)$.
◇ Soit $x, y \in E$ tels que (x, y) est libre.
$g(\lambda(x+y)) = g((\lambda x) + (\lambda y)) = g(\lambda x) + g(\lambda y)$,
donc $\sigma(\lambda, x+y) g(x+y) = \sigma(\lambda, x) g(x) + \sigma(\lambda, y) g(y)$, or $g(x+y) = g(x) + g(y)$, donc $(\sigma(\lambda, x+y) - \sigma(\lambda, x)) g(x) + (\sigma(\lambda, x+y) - \sigma(\lambda, y)) g(y) = 0$, or d'après la question 18, $(g(x), g(y))$ est libre, donc $\sigma(\lambda, x) = \sigma(\lambda, x+y) = \sigma(\lambda, y)$.
◇ Soit $x, y \in E \setminus \{0\}$ tels que (x, y) est lié.
L'énoncé suppose que $\dim(E) \geq 3$, donc on peut compléter la famille (x), constituée du seul vecteur x, en une base $(x, z, e_3, \ldots, e_n)$ de E. Alors (x, z) et (y, z) sont libres, donc d'après le point précédent, $\sigma(\lambda, x) = \sigma(\lambda, z) = \sigma(\lambda, y)$.

$\diamond$ Ainsi, la quantité $\sigma(\lambda, x)$ ne dépend pas de x lorsque $x \in E \setminus \{0\}$. On peut donc la noter $\sigma(\lambda)$. Ainsi, pour tout $x \in E$, $g(\lambda x) = \sigma(\lambda)g(x)$, cette égalité étant évidente lorsque $x = 0$.
De plus, en posant $\sigma(0) = 0$, cette égalité est vraie pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$.
• Montrons que σ est un morphisme de corps de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{L}$. Pour cela, fixons un vecteur x non nul de E. On sait alors que $g(x)$ est aussi non nul.
$\diamond$ $\sigma(1)g(x) = g(1.x) = g(x)$, donc $\sigma(1) = 1$.
$\diamond$ Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. $\sigma(\lambda + \mu)g(x) = g((\lambda + \mu)x) = g((\lambda x) + (\mu x)) = g(\lambda x) + g(\mu x)$, donc $\sigma(\lambda + \mu)g(x) = \sigma(\lambda)g(x) + \sigma(\mu)g(x)$, ce qui prouve que $\sigma(\lambda + \mu) = \sigma(\lambda) + \sigma(\mu)$.
De même, $\sigma(\lambda\mu)g(x) = g((\lambda\mu)x) = g(\lambda(\mu x)) = \sigma(\lambda)g(\mu x) = \sigma(\lambda)\sigma(\mu)g(x)$, donc $\sigma(\lambda\mu) = \sigma(\lambda)\sigma(\mu)$.
• En tant que morphisme de corps, d'après le cours, σ est injectif. En effet, si $\lambda \neq 0$, λ est inversible, donc $\sigma(\lambda)$ est aussi inversible, donc $\sigma(\lambda) \neq 0$.
Montrons que σ est surjectif. Soit $\mu \in \mathbb{L}$.
Si $\mu = 0$, alors $\mu = \sigma(0)$. Supposons maintenant que $\mu \neq 0$.
g étant bijective, il existe $y \in E \setminus \{0\}$ tel que $g(y) = \mu g(x)$.
On a $\mathbb{L}(\mu g(x)) = \mathbb{L}g(y) = f(\mathbb{K}y)$ et $\mathbb{L}(\mu g(x)) = \mathbb{L}g(x) = f(\mathbb{K}x)$, or f est bijective, donc $\mathbb{K}y = \mathbb{K}x$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $y = \lambda x$.
Alors $\mu g(x) = g(y) = g(\lambda x) = \sigma(\lambda)g(x)$, donc $\mu = \sigma(\lambda)$.
• Ainsi, σ est un isomorphisme du corps $\mathbb{K}$ sur le corps $\mathbb{L}$ et g est σ-linéaire car g est additive et pour tout $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$, $g(\lambda x) = \sigma(\lambda)g(x)$.
Soit maintenant $A \in \mathcal{E}$. A est de dimension finie p avec $p \leq n$.
Il existe une base de A, notée $(e_1, \ldots, e_p)$. Alors $A = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{K}e_i$,
donc $f(A) = \sum_{i=1}^{p} f(\mathbb{K}e_i) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{L}g(e_i)$, or

$$\begin{aligned} g(A) &= g\Big(\Big\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \ / \ \forall i \in \mathbb{N}_p, \ \lambda_i \in \mathbb{K} \Big\}\Big) \\ &= \Big\{ \sum_{i=1}^{p} \sigma(\lambda_i) g(e_i) \ / \ \forall i \in \mathbb{N}_p, \ \lambda_i \in \mathbb{K} \Big\} \\ &= \Big\{ \sum_{i=1}^{p} \mu_i g(e_i) \ / \ \forall i \in \mathbb{N}_p, \ \mu_i \in \mathbb{L} \Big\}, \end{aligned}$$

car σ est surjectif, donc $g(A) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{L}g(e_i) = f(A)$.
En conclusion, on a montré, en admettant un passage un peu technique, que les seules projectivités entre $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont celles de la question 10, qui sont construites à l'aide d'une bijection σ-linéaire de E dans F, où σ est un isomorphisme de corps entre $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$, à supposer qu'un tel σ existe.