

DM 19 : un corrigé

Partie I : applications bilinéaires

1°) \diamond Pour tout $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a bien : $(\alpha x + y)z = \alpha(xz) + (yz)$ et $x(\alpha z + t) = \alpha(xz) + (xt)$. Ainsi, $(x, y) \mapsto xy$ est une application bilinéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

\diamond On suppose que A est une \mathbb{K} -algèbre. Alors le calcul précédent est encore valable : Pour tout $x, y, z, t \in A$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, on a bien : $(\alpha x + y)z = \alpha(xz) + (yz)$ et $x(\alpha z + t) = \alpha(xz) + (xt)$: $(x, y) \mapsto xy$ est une application bilinéaire de A^2 dans A .

2°) Soit $f_0, f_1 \in E$, $g_0, g_1 \in F$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} b(\alpha f_0 + f_1, g_0) &= \int_0^1 (\alpha f_0(t) + f_1(t))(g_0(t) + 2g_0'(t)) dt \\ &= \alpha \int_0^1 f_0(t)(g_0(t) + 2g_0'(t)) dt + \int_0^1 f_1(t)(g_0(t) + 2g_0'(t)) dt \\ &= \alpha b(f_0, g_0) + b(f_1, g_0), \text{ et} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(f_0, \alpha g_0 + g_1) &= \int_0^1 f_0(t)(\alpha g_0(t) + 2\alpha g_0'(t) + g_1(t) + 2g_1'(t)) dt \\ &= \alpha \int_0^1 f_0(t)(g_0(t) + 2g_0'(t)) dt + \int_0^1 f_0(t)(g_1(t) + 2g_1'(t)) dt \\ &= \alpha b(f_0, g_0) + b(f_0, g_1), \end{aligned}$$

donc b est bien une application bilinéaire.

3°) D'après le cours, l'ensemble $\mathcal{F}(E \times F, G)$ des applications de $E \times F$ dans G est un \mathbb{K} -espace vectoriel, car G est un \mathbb{K} -espace vectoriel. Montrons que $B(E, F; G)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E \times F, G)$.

Déjà, l'application identiquement nulle est clairement bilinéaire, donc $B(E, F; G) \neq \emptyset$. Soit $f, g \in B(E, F; G)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

Soit $x, y \in E$, $z, t \in F$ et $\beta \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} (\alpha f + g)(\beta x + y, z) &= \alpha f(\beta x + y, z) + g(\beta x + y, z) \\ &= \alpha(\beta f(x, z) + f(y, z)) + \beta g(x, z) + g(y, z) \text{ et} \\ \beta(\alpha f + g)(x, z) + (\alpha f + g)(y, z) &= \beta\alpha f(x, z) + \beta g(x, z) + \alpha f(y, z) + g(y, z), \end{aligned}$$

donc $(\alpha f + g)(\beta x + y, z) = \beta(\alpha f + g)(x, z) + (\alpha f + g)(y, z)$.

De même, on montre que $(\alpha f + g)(x, \beta z + t) = \beta(\alpha f + g)(x, z) + (\alpha f + g)(x, t)$, donc $\alpha f + g \in B(E, F; G)$, ce qu'il fallait démontrer.

4°) Lorsque $b \in B(E, F; G)$ et $x \in E$, notons $b(x, \cdot)$ l'application de F dans G définie par : pour tout $y \in F$, $b(x, \cdot)(y) = b(x, y)$.

Pour tout $z, t \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$b(x, \cdot)(\alpha z + t) = b(x, \alpha z + t) = \alpha b(x, z) + b(x, t) = \alpha b(x, \cdot)(z) + b(x, \cdot)(t),$$

donc $b(x, \cdot) \in L(F, G)$.

Ainsi, l'application $\varphi(b) : x \mapsto b(x, \cdot)$ est une application de E dans $L(F, G)$.

Vérifions que $\varphi(b)$ est linéaire : soit $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Pour tout $z \in F$,

$$[\varphi(b)(\alpha x + y)](z) = b(\alpha x + y, z) = \alpha b(x, z) + b(y, z) = [\alpha \varphi(b)(x) + \varphi(b)(y)](z), \text{ donc}$$
$$\varphi(b)(\alpha x + y) = \alpha \varphi(b)(x) + \varphi(b)(y).$$

Ainsi φ est une application de $B(E, F; G)$ dans $L(E, L(F, G))$.

Il reste à montrer que c'est un isomorphisme.

Soit $b, b' \in B(E, F; G)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Pour tout $(x, y) \in E \times F$,

$$\varphi(\alpha b + b')(x)(y) = (\alpha b + b')(x, y) = \alpha b(x, y) + b'(x, y) = [\alpha \varphi(b) + \varphi(b)](x, y), \text{ donc } \varphi$$

est linéaire.

Soit $b \in \text{Ker} \varphi$. Pour tout $(x, y) \in E \times F$, $0 = \varphi(b)(x)(y) = b(x, y)$, donc $b = 0$. Ainsi, $\text{Ker} \varphi = \{0\}$, donc φ est injective.

Soit $\ell \in L(E, L(F, G))$. Pour tout $(x, y) \in E \times F$, posons $b(x, y) = \ell(x)(y)$. On vérifie que b est bilinéaire de $E \times F$ dans G . De plus, pour tout $(x, y) \in E \times F$,

$$\varphi(b)(x)(y) = b(x, y) = \ell(x)(y), \text{ donc } \varphi(b) = \ell, \text{ ce qui prouve que } \varphi \text{ est surjective.}$$

On a donc montré que l'application $b \mapsto (x \mapsto b(x, \cdot))$ est un isomorphisme de $B(E, F; G)$ dans $L(E, L(F, G))$.

Partie II : unicité du produit tensoriel

5°) Soit G un \mathbb{K} -espace vectoriel. Lorsque $\ell \in L(P, G)$, u étant une application de $E \times F$ dans P , par composition, $\ell \circ u$ est une application de $E \times F$ dans G . De plus, $\ell \circ u$ est bien une application bilinéaire : en effet, pour tout $x, y \in E$, $z, t \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, $\ell \circ u(\alpha x + y, z) = \ell(\alpha u(x, z) + u(y, z)) = \alpha \ell(u(x, z)) + \ell(u(y, z))$, pour bilinéarité de u puis par linéarité de ℓ , donc $\ell \circ u(\alpha x + y, z) = \alpha \ell \circ u(x, z) + \ell \circ u(y, z)$.

De même, on vérifie que $\ell \circ u(x, \alpha z + t) = \alpha \ell \circ u(x, z) + \ell \circ u(x, t)$.

Ainsi $\varphi : \ell \mapsto \ell \circ u$ est une application de $L(P, G)$ dans $B(E, F; G)$.

Il reste à montrer qu'elle est linéaire.

Soit $\ell, \ell' \in L(P, G)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Pour tout $(x, y) \in E \times F$,

$$\varphi(\alpha \ell + \ell')(x, y) = (\alpha \ell + \ell')(u(x, y)) = \alpha \ell(u(x, y)) + \ell'(u(x, y)) = [\alpha \varphi(\ell) + \varphi(\ell)](x, y),$$

ce qu'il fallait démontrer.

6°) D'après l'énoncé, P muni de u est un produit tensoriel de E par F si et seulement si, pour tout \mathbb{K} -espace vectoriel G , pour toute application bilinéaire b de $E \times F$ dans G , il existe une unique application linéaire ℓ de P dans G telle que $b = \ell \circ u$.

◇ Supposons que P' muni de u' est un produit tensoriel de E par F .

u' est une application bilinéaire de $E \times F$ dans P' , donc en appliquant l'affirmation précédente avec $G = P'$ et $b = u'$, il existe une application linéaire h de P dans P' telle que $u' = h \circ u$.

Mais (P, u) et (P', u') jouent des rôles symétriques, donc il existe également une application linéaire h' de P' dans P telle que $u = h' \circ u'$.

On en déduit que $u = h' \circ h \circ u = Id_P \circ u$, or d'après la propriété énoncée en début de question avec $G = P$ et $b = u$ il existe une unique application h'' de P dans P telle que $u = h'' \circ u$, donc $h' \circ h = Id_P$. Par symétrie, on obtient également que $h \circ h' = Id_{P'}$, donc h est une bijection linéaire, c'est un isomorphisme de P dans P' .

◇ Supposons qu'il existe un isomorphisme h de P et P' tel que $u' = h \circ u$.

Soit G un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Notons $\varphi_0 : L(P, G) \longrightarrow B(E, F; G)$ et $\varphi_1 : L(P', G) \longrightarrow B(E, F; G)$
 $\ell \longmapsto \ell \circ u$ et $\ell' \longmapsto \ell' \circ u' = \ell' \circ h \circ u$.

On sait que φ_0 est un isomorphisme et il s'agit de montrer que φ_1 est un isomorphisme.

Notons $\Psi : L(P', G) \longrightarrow L(P, G)$
 $\ell' \longmapsto \ell' \circ h$.

Pour tout $\ell' \in L(P', G)$, $\varphi_0 \circ \Psi(\ell') = \varphi_0(\ell' \circ h) = \ell' \circ h \circ u = \varphi_1(\ell')$, donc $\varphi_1 = \varphi_0 \circ \Psi$, et il suffit de montrer que Ψ est un isomorphisme. C'est clair car on vérifie que Ψ est bien linéaire et que si l'on note $\Psi' = (\ell \longmapsto \ell \circ h^{-1})$, alors $\Psi \circ \Psi' = Id_{L(P, G)}$ et $\Psi' \circ \Psi = Id_{L(P', G)}$.

Partie III : quotient d'espaces vectoriels

7°) Pour tout $x \in E$, $x - x = 0 \in F$, car F est un sous-espace vectoriel, donc $x R x$, ce qui prouve que R est réflexive.

Soit $x, y \in E$ tels que $x R y$. Alors $y - x = -(x - y) \in F$ car $x - y \in F$ et car F est un sous-espace vectoriel, donc $y R x$, ce qui prouve que R est symétrique.

Soit $x, y, z \in E$ tels que $x R y$ et $y R z$. Alors $x - y \in F$ et $y - z \in F$, or F est stable pour l'addition, donc $x - z = x - y + y - z \in F$. Ainsi, $x R z$, ce qui prouve que R est transitive.

On a donc montré que R est une relation d'équivalence.

8°)

◇ Pour montrer que cette définition de l'addition dans E/F est correcte, il faut établir que la quantité $\overline{x + y}$ dépend seulement de \overline{x} et de \overline{y} , c'est-à-dire que si $\overline{x'} = \overline{x}$ et $\overline{y'} = \overline{y}$, alors $\overline{x' + y'} = \overline{x + y}$. C'est vrai car si $\overline{x'} = \overline{x}$ et $\overline{y'} = \overline{y}$, alors $x - x' \in F$ et $y - y' \in F$, donc $(x + y) - (x' + y') = (x - x') + (y - y') \in F$ puis $\overline{x' + y'} = \overline{x + y}$.

De même, il faut montrer que $\overline{\alpha x}$ ne dépend que de \overline{x} (et de α) : supposons que $\overline{x} = \overline{x'}$. Alors $x - x' \in F$, mais F est un sous-espace vectoriel, donc $\alpha(x - x') \in F$, puis $\overline{\alpha x} = \overline{\alpha x'}$.

Il est clair que pour tout $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, $\overline{x + y} \in E/F$ et $\overline{\alpha x} \in E/F$.

◇ Les propriétés caractéristiques d'un \mathbb{K} -espace vectoriel pour E/F se déduisent alors facilement de celles de E :

- Pour tout $x, y, z \in E$, $\overline{x} + (\overline{y} + \overline{z}) = \overline{x + (y + z)} = \overline{(x + y) + z}$, car l'addition dans E est associative, donc $\overline{x} + (\overline{y} + \overline{z}) = (\overline{x + y}) + \overline{z}$. Ainsi l'addition dans E/F est aussi associative.
- De même, on montre la commutativité : $\overline{x} + \overline{y} = \overline{y + x}$.
- Pour tout $x \in E$, $\overline{0} + \overline{x} = \overline{x}$, donc $\overline{0}$ est neutre.

- Pour tout $x \in E$, $\bar{x} + \overline{-x} = \bar{0}$, donc $\overline{-x}$ est le symétrique de \bar{x} , ce qui permettra d'écrire que $\overline{-x} = -\bar{x}$.

On a ainsi montré que $(E/F, +)$ est un groupe abélien.

De plus, on vérifie facilement que, pour tout $x, y \in E$, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

- $\alpha(\bar{x} + \bar{y}) = (\alpha\bar{x}) + (\alpha\bar{y})$,
- $(\alpha + \beta)\bar{x} = (\alpha\bar{x}) + (\beta\bar{x})$,
- $(\alpha\beta)\bar{x} = \alpha(\beta\bar{x})$ et
- $1_{\mathbb{K}}\bar{x} = \bar{x}$.

Ainsi, $(E/F, +, \cdot)$ est bien un \mathbb{K} -espace vectoriel.

9°) Posons $f : G \longrightarrow E/F$
 $x \longmapsto \bar{x}$. D'après la question précédente, pour tout $x, y \in G$

et $\alpha \in \mathbb{K}$, $f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$, donc f est une application linéaire.

Soit $x \in \text{Ker } f$. Alors $\bar{x} = 0 = \bar{0}$, donc $x \in F$. Ainsi, $x \in F \cap G = \{0\}$, donc $\text{Ker } f = \{0\}$, ce qui prouve que f est injective.

Soit $z \in E/F$. Il existe $x \in E$ tel que $z = \bar{x}$. Mais $E = F + G$, donc il existe $y \in F$ et $t \in G$ tel que $x = y + t$. Alors $z = \bar{y} + \bar{t} = \bar{t}$, car $y \in F$ donc $\bar{y} = \bar{0} = 0$. Ainsi, $z = f(t)$, ce qui prouve que f est surjective.

Ainsi f est un isomorphisme de G sur E/F , ce qu'il fallait démontrer.

10°)

◇ Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F \cap G$. Ainsi, $x + y + z = 0$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire tel que $x = y = z = \lambda$. On en déduit que $0 = x + y + z = 3\lambda$, donc $\lambda = 0$ puis $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$. Ainsi $F \cap G = \{0\}$.

◇ Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$X = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ -a - b \end{pmatrix}$. On doit avoir $\lambda + a = x$, $\lambda + b = y$ et $\lambda - a - b = z$. En

sommant ces trois égalités, on obtient $3\lambda = x + y + z$.

Posons donc $\lambda = \frac{1}{3}(x + y + z)$, $a = x - \lambda$ et $b = y - \lambda$. Alors, on vérifie que $\lambda + a = x$, $\lambda + b = y$ et $\lambda - a - b = z$: pour la dernière égalité,

$$\lambda - a - b = \frac{1}{3}(x + y + z) - (x - \frac{1}{3}(x + y + z)) - (y - \frac{1}{3}(x + y + z)) = z.$$

Ainsi, $X = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ -a - b \end{pmatrix} \in G + F$, donc $E = F + G$. On a vu que $F \cap G = \{0\}$,

donc $E = F \oplus G$.

◇ Alors, d'après la question précédente, $f : G \longrightarrow E/F$
 $x \longmapsto \bar{x}$ est un isomorphisme,

donc $E/F = \text{Im}(f) = f(G) = \{f(\lambda e) / \lambda \in \mathbb{R}\}$, en posant $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $E/F = \{\lambda \bar{e} / \lambda \in \mathbb{R}\}$, donc E/F est l'espace vectoriel engendré par le vecteur \bar{e} . Or $e \neq 0$ et f est injective, donc $\bar{e} \neq 0$, ce qui prouve que E/F est bien une droite vectorielle.

Partie IV : existence du produit tensoriel

11°) D'après le cours, \mathbb{K}^I est un \mathbb{K} -espace vectoriel, donc il s'agit de montrer que $\mathbb{K}^{(I)}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^I .

La famille nulle appartient à $\mathbb{K}^{(I)}$, donc $\mathbb{K}^{(I)} \neq \emptyset$.

Soit $((a_i), (b_i), \alpha) \in \mathbb{K}^{(I)} \times \mathbb{K}^{(I)} \times \mathbb{K}$.

Soit $i \in I$. Si $a_i = 0$ et $b_i = 0$, alors $\alpha a_i + b_i = 0$. La contraposée de cette implication est : $\forall i \in I [\alpha a_i + b_i \neq 0 \implies (a_i \neq 0 \text{ ou } b_i \neq 0)]$, donc

$\{i \in I / \alpha a_i + b_i \neq 0\} \subset (\{i \in I / a_i \neq 0\} \cup \{i \in I / b_i \neq 0\})$, ainsi $\{i \in I / \alpha a_i + b_i \neq 0\}$ est fini, ce qui prouve que $\alpha(a_i) + (b_i) \in \mathbb{K}^{(I)}$, ce qu'il fallait démontrer.

12°) \diamond Soit $(\alpha_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$. $\sum_{i \in I} \alpha_i c_i = \sum_{\substack{i \in I \\ \text{tel que } \alpha_i \neq 0}} \alpha_i (\delta_{i,j})_{j \in I}$. Il s'agit bien d'une somme

finie, donc $\sum_{i \in I} \alpha_i c_i = \left(\sum_{\substack{i \in I \\ \text{tel que } \alpha_i \neq 0}} \alpha_i \delta_{i,j} \right)_{j \in I} = (\alpha_j)_{j \in I} = (\alpha_i)_{i \in I}$.

\diamond Soit $x = (x_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$. Pour tout $(\alpha_i) \in \mathbb{K}^{(I)}$, on vient de montrer que

$x = \sum_{i \in I} \alpha_i c_i \iff x = (\alpha_i)_{i \in I}$, donc cela prouve l'existence et l'unicité d'une famille

$(\alpha_i) \in \mathbb{K}^{(I)}$ telle que $x = \sum_{i \in I} \alpha_i c_i$, ce qu'il fallait démontrer.

13°) Notons $u : E \times F \longrightarrow \frac{P}{c_{e,f}}$. Soit $e, e' \in E$, $f \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

$u(\alpha e + e', f) = \overline{c_{\alpha e + e', f}}$, or $c_{\alpha e + e', f} - \alpha c_{e,f} - c_{e', f} \in A_1 \subset S$, donc

$0 = \overline{c_{\alpha e + e', f} - \alpha c_{e,f} - c_{e', f}} = \overline{c_{\alpha e + e', f}} - \alpha \overline{c_{e,f}} - \overline{c_{e', f}} = u(\alpha e + e', f) - \alpha u(e, f) - u(e', f)$.

On a donc prouvé que $u(\alpha e + e', f) = \alpha u(e, f) + u(e', f)$.

De même on montre que $u(e, \alpha f + f') = \alpha u(e, f) + u(e, f')$, donc u est bilinéaire.

14°) Soit G un \mathbb{K} -espace vectoriel et $b \in B(E, F; G)$. Il s'agit de montrer qu'il existe une unique application linéaire $\ell \in L(P, G)$ telle que $b = \ell \circ u$.

\diamond Commençons par l'unicité : supposons que $\ell, \ell' \in L(P, G)$ et $b = \ell \circ u = \ell' \circ u$. Alors, pour tout $(x, y) \in E \times F$, $\ell(\overline{c_{x,y}}) = \ell'(\overline{c_{x,y}})$, donc $\overline{c_{x,y}} \in \text{Ker}(\ell - \ell')$. On en déduit que

$\text{Ker}(\ell - \ell')$ contient $V = \text{Vect}(\{\overline{c_{x,y}} / (x, y) \in E \times F\})$,

or $V = \left\{ \sum_{(x,y) \in E \times F} \alpha_{x,y} \overline{c_{x,y}} / (\alpha_{x,y}) \in \mathbb{K}^{(E \times F)} \right\} = \left\{ \sum_{(x,y) \in E \times F} \alpha_{x,y} c_{x,y} / (\alpha_{x,y}) \in \mathbb{K}^{(E \times F)} \right\}$

donc $V = \{\overline{X} / X \in Q\}$, car $(c_{x,y})_{(x,y) \in E \times F}$ est une base de Q . Ainsi, $V = P$, donc $\text{Ker}(\ell - \ell') = P$, donc $\ell - \ell' = 0$, ce qui prouve l'unicité.

◇ *Existence* :

$$L : Q = \mathbb{K}^{(E \times F)} \longrightarrow G$$

Posons $X = (\alpha_{x,y})_{(x,y) \in E \times F} \longmapsto L(X) = \sum_{(x,y) \in E \times F} \alpha_{x,y} b(x,y).$

Montrons que L est linéaire : Soit $X = (\alpha_{x,y}) \in Q, Y = (\beta_{x,y}) \in Q$ et $\lambda \in \mathbb{K}.$

$$L(\lambda X + Y) = L((\lambda \alpha_{x,y} + \beta_{x,y})) = \sum_{(x,y) \in E \times F} (\lambda \alpha_{x,y} + \beta_{x,y}) b(x,y) = \lambda L(X) + L(Y).$$

Montrons que $S \subset \text{Ker}(L)$: Soit $e, e' \in E, f \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}.$ Par linéarité de $L,$
 $L(c_{\alpha e + e', f} - \alpha c_{e, f} - c_{e', f}) = L(c_{\alpha e + e', f}) - \alpha L(c_{e, f}) - L(c_{e', f}),$ puis par définition de $L,$
 $L(c_{\alpha e + e', f} - \alpha c_{e, f} - c_{e', f}) = b(\alpha e + e', f) - \alpha b(e, f) - b(e', f),$ or b est bilinéaire, donc
 $c_{\alpha e + e', f} - \alpha c_{e, f} - c_{e', f} \in \text{Ker}(L).$

De même, on montre que, pour tout $e \in E, f, f' \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K},$

$c_{e, \alpha f + f'} - \alpha c_{e, f} - c_{e, f'} \in \text{Ker}(S),$ donc $\text{Ker}(S)$ contient $\text{Vect}(A_1 \cup A_2) = S.$

Ainsi, pour tout $X, Y \in Q$ tels que $\overline{X} = \overline{Y}, X - Y \in S,$ donc $L(X - Y) = 0,$ donc
 $L(X) = L(Y).$ Ainsi, $L(X)$ ne dépend que de $\overline{X},$ donc on peut poser, pour tout $X \in Q,$
 $\ell(\overline{X}) = L(X).$ Ceci définit une application ℓ de P dans $G.$ Montrons que ℓ convient.

Pour tout $X, Y \in Q$ et $\alpha \in \mathbb{K},$

$$\ell(\alpha \overline{X} + \overline{Y}) = \ell(\overline{\alpha X + Y}) = L(\alpha X + Y) = \alpha L(X) + L(Y) = \alpha \ell(\overline{X}) + \ell(\overline{Y}),$$

donc $\ell \in L(P, G).$

Soit $(x, y) \in E \times F.$ $\ell \circ u(x, y) = \ell(\overline{c_{x,y}}) = L(c_{x,y}) = b(x, y),$ donc $\ell \circ u = b,$ ce qu'il fallait démontrer.

Partie V : Newton \iff Leibniz

15°) Par récurrence sur $n,$ on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}, \frac{d^n}{dt^n}(e^{at}) = a^n e^{at}.$

Posons $f(t) = e^{at}$ et $g(t) = e^{bt}.$ Soit $n \in \mathbb{N}.$

Partons de la formule de Leibniz : pour tout $t \in \mathbb{R}, (fg)^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(t) g^{(n-k)}(t),$

or $fg(t) = e^{(a+b)t},$ donc on obtient : $(a+b)^n e^{(a+b)t} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k e^{at} b^{n-k} e^{bt}.$ On en déduit

la formule du binôme de Newton en simplifiant par $e^{(a+b)t},$ qui est bien non nul.

16°) L'application $(f, g) \longmapsto f' \otimes g$ est clairement bilinéaire de $E \times E$ dans $E \otimes E,$ donc par définition du produit tensoriel, il existe une unique application linéaire d_1 de $E \otimes E$ dans $E \otimes E$ telle que, pour tout $(f, g) \in E^2, d_1(f \otimes g) = f' \otimes g.$ Un raisonnement similaire établit l'existence et l'unicité de d_2 et de $p.$

17°) Soit $f, g \in E.$ $dp(f \otimes g) = d(fg) = f'g + fg'$

et $p(d_1 + d_2)(f \otimes g) = p(f' \otimes g + f \otimes g') = f'g + fg',$ par linéarité de $p,$ donc pour tout $f, g \in E, dp(f \otimes g) = p(d_1 + d_2)(f \otimes g).$

Or d'après la question 14, avec les notations de cette question,

pour tout $z \in P = E \otimes F,$ il existe $(\alpha_{x,y})_{(x,y) \in E \times F}$

tel que $z = \overline{(\alpha_{x,y})_{(x,y) \in E \times F}} = \overline{\sum_{(x,y) \in E \times F} \alpha_{x,y} c_{x,y}} = \sum_{(x,y) \in E \times F} \alpha_{x,y} \overline{c_{x,y}}$,

donc $z = \sum_{(x,y) \in E \times F} \alpha_{x,y} x \otimes y$.

Ainsi, avec les notations de la question actuelle, $E \otimes E = \text{Vect}(\{f \otimes g / f, g \in E\})$. Or on vient de voir que $\text{Ker}(dp - p(d_1 + d_2))$ contient $\{f \otimes g / f, g \in E\}$, donc il contient $E \otimes E$. Ainsi, $dp - p(d_1 + d_2) = 0$.

On a donc prouvé que $dp = p(d_1 + d_2)$. On en déduit alors facilement par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d^n p = p(d_1 + d_2)^n$.

18°) Pour tout $f, g \in E$, $d_1 d_2 (f \otimes g) = d_1 (f \otimes g') = f' \otimes g' = d_2 d_1 (f \otimes g)$. Ainsi, $\text{Ker}(d_1 d_2 - d_2 d_1)$ contient $\{f \otimes g / f, g \in E\}$ et comme précédemment, on en déduit que $d_1 d_2 = d_2 d_1$. On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(d_1 + d_2)^n$

dans l'anneau $(L(E \otimes E), +, \circ)$: si l'on fixe $n \in \mathbb{N}$, $(d_1 + d_2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_1^k d_2^{n-k}$.

On en déduit alors la formule de Leibniz : pour tout $f, g \in E$

$$(fg)^n = d^n p(f \otimes g) = p(d_1 + d_2)^n (f \otimes g) = p\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_1^k d_2^{n-k}\right) (f \otimes g),$$

$$\text{donc } (fg)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$