Feuille d'exercices 14 : Normes et suites.

Exercice 14.1 : (niveau 1)
Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé,
démontrer qu'une suite périodique convergente est constante.

Exercice 14.2 : (niveau 1)
Soit (u_n) une suite réelle telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{Z}$. Montrez que (u_n) converge si et seulement si elle est stationnaire.

Exercice 14.3 : (niveau 1)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes de réels. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \max(u_n, v_n)$.

Exercice 14.4 : (niveau 1)
On suppose que $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 3u_n$.
Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 14.5 : (niveau 1)
On note $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ et pour tout $f \in E$, on pose $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.
Montrer que $\|.\|$ est une norme sur E. Est-elle équivalente à $\|.\|_\infty$?

Exercice 14.6 : (niveau 1)
Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On définit les deux suites (u_n) et (v_n) par :
$u_0 = a, v_0 = b$ et : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$.
1°) Montrez que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < v_n$.
2°) Montrez que (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante.
3°) En déduire que (u_n) et (v_n) converge vers une même limite.

Exercice 14.7 : (niveau 1)
Soit (u_n) une suite telle que les sous-suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent.
Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 14.8 : (niveau 2)
Soit (a_n) une suite de réels positifs telle que $n(a_n + a_{2n}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

1°) Montrer que $a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

2°) On suppose que $na_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\ell = \frac{2}{3}$.

Exercice 14.9 : (niveau 2)
E est un espace vectoriel normé. B et C sont deux parties non vides de E.
Montrer que $\delta(B \cup C) \leq \delta(B) + \delta(C) + d(B, C)$.

Exercice 14.10 : (niveau 2)
On note E l'ensemble des applications de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = 0$.
Si $f \in E$, on note $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ et $n(f) = \|f + f'\|_\infty$.

1°) Montrer que N et n sont des normes.

2°) Montrer que N et n sont équivalentes.

Exercice 14.11 : (niveau 2)

1°) Définir sur $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ x_n = 0\}$ les normes 1, 2 et ∞ et montrer directement que ce sont bien des normes.

2°) Montrer que ces normes sont deux à deux non équivalentes.

Exercice 14.12 : (niveau 2)
Démontrer que la suite $(\sin n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Exercice 14.13 : (niveau 2)
On suppose que $u_0 = 1$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.
Déterminer u_n en fonction de n.
En déduire la valeur de $\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}$.

Exercice 14.14 : (niveau 2)
Soit f une application injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
Démontrer que $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 14.15 : (niveau 3)
Soit (u_n) une suite de réels telle que $u_{n+1} - u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est un intervalle.

Exercice 14.16 : (niveau 3)
Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $K \in \mathcal{P}(E)$ une partie de E, que l'on suppose convexe, bornée, symétrique par rapport à 0 et tel que 0 est un point intérieur de K.
Pour tout $x \in E$, on pose $N_x = \{|\lambda| \ / \ \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ et } \frac{x}{\lambda} \in K\}$ et $N(x) = \inf(N_x)$.

1°) Montrer que N est une norme sur E.

2°) Montrer que N et $\|.\|$ sont des normes équivalentes.

Exercices supplémentaires

Exercice 14.17 : (niveau 1)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels telles que $(u_n + v_n)$ et $(u_n - v_n)$ convergent.
Montrer que (u_n) et (v_n) sont convergentes.

Exercice 14.18 : (niveau 1)
Soit (u_n) une suite croissante de réels telle que $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$.
Montrer que (u_n) converge.

Exercice 14.19 : (niveau 1)
On suppose que $u_0 = 2$, $u_1 = 4$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^4}{u_n^3}$.
Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 14.20 : (niveau 2)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq a$, $v_n \leq b$, et tels que $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a + b$.
Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$.

Exercice 14.21 : (niveau 2)
Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé non réduit à $\{0\}$, montrer que deux boules fermées sont égales si et seulement si elles ont même centre et même rayon.

Exercice 14.22 : (niveau 2)
Soit (u_n) une suite quelconque de réels.
Montrer que (u_n) est la différence de deux suites strictement croissantes.

Exercice 14.23 : (niveau 2)
Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et soit (u_n) une suite de réels telle que, pour tout $k \geq 2$, la sous-suite (u_{kn}) converge vers ℓ. Peut-on affirmer que (u_n) converge vers ℓ ?

Exercice 14.24 : (niveau 2)
Une personne a dépensé tout ce qu'elle avait en poche dans N magasins. Dans chacun elle a dépensé dix euros de plus que la moitié de ce qu'elle avait en entrant. Combien avait-elle en poche au départ ?

Exercice 14.25 : (niveau 2)
Déterminer les réels θ tels que toutes les suites (u_n) de réels vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} - 2\cos\theta\ u_{n+1} + u_n = 0$ soient périodiques.

Exercice 14.26 : (niveau 2)
Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. On considère une suite (u_n) définie par la donnée de ses deux premiers termes u_0 et u_1 et la relation de récurrence affine d'ordre 2 :
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c$.

1°) On suppose que $a + b \neq 1$.
a) Donner une méthode de détermination de u_n en fonction de n.
b) Le faire dans le cas où $a = -1$, $b = 6$, $c = 4$, $u_0 = 1$ et $u_1 = -2$.

2°) On suppose que a + b = 1.
a) Donner une méthode de détermination de u_n en fonction de n : on pourra poser $w_n = u_{n+1} - u_n$.
b) Le faire dans le cas où $a = 3$, $b = -2$, $c = 1$, $u_0 = 0$ et $u_1 = 0$.

Exercice 14.27 : (niveau 2)
On considère une suite de complexes (z_n) vérifiant la relation de récurrence
$z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|)$.
Déterminer la limite de z_n lorsque n tend vers $+\infty$ en fonction de z_0.

Exercice 14.28 : (niveau 2)
Soient $p \in]1, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $N(x) = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$.

1°) Montrer que, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, pour tout $t \in [0, 1]$,
$N(tx + (1-t)y)^p \leq tN(x)^p + (1-t)N(y)^p$.

2°) Montrer que $\{x \in \mathbb{R}^n / N(x) \leq 1\}$ est convexe.

3°) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 14.29 : (niveau 2)
Soit E l'ensemble des applications lipschitziennes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

1°) Montrer que si $f \in E$, on peut définir le plus petit réel positif $k(f)$ tel que f soit $k(f)$-lipschitzienne.

2°) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

3°) On pose $M(f) = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$ et $N(f) = M(f) + k(f)$.
Montrer que M et N sont des normes sur E et qu'elles ne sont pas équivalentes.

Exercice 14.30 : (niveau 2)
Soit (a_n) une suite réelle telle que :
i) $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq 1$ et :
ii) $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \quad a_{m+n} \leq a_m a_n$.
Montrez que la suite $b_n = \dfrac{\ln(a_n)}{n}$ converge vers sa borne inférieure.

Exercice 14.31 : (niveau 3)
E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et A est une partie non vide de E.
Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une application k-lipschitzienne avec $k > 0$. Pour tout $x \in E$, on pose $g(x) = \sup_{t \in A}(f(t) - k\|x - t\|)$.

1°) Montrer que g est bien définie.

2°) Montrer que g prolonge f sur E.

3°) Montrer que g est k-lipschitzienne.

Exercice 14.32 : (niveau 3)
Notons E l'ensemble des applications de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Soit φ une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^1 \varphi \neq 0$. Pour tout $f \in E$, on pose
$N(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|dt$ et $N'(f) = |\int_0^1 f(t)\varphi(t)dt| + \int_0^1 |f'(t)|dt$.
Montrer que N et N' sont des normes équivalentes sur E.

Exercice 14.33 : (niveau 3)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit B une partie de E.
Montrer qu'il existe une norme sur E dont B est la boule unité si et seulement si elle vérifie les propriétés suivantes :

- B est convexe ;
- B ne contient aucune droite ;
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $|\alpha| \leq 1$, $\alpha B \subset B$ (on dit que B est équilibrée) ;
- $E = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{K}} \alpha B$ (on dit que B est absorbante).

Exercice 14.34 : (niveau 3)
On dira qu'une partie T de $\mathbb{N}^*$ est négligeable si et seulement si $\frac{|T_n|}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
où $T_n = T \cap [1,n]$ et où $|T_n|$ désigne le cardinal de T_n.
Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de complexes est dite presque convergente vers $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si il existe une partie négligeable $T \subset \mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists p \in \mathbb{N}^*,\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ [n \geq p] \wedge [n \notin T] \Longrightarrow |a_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

ℓ est alors unique, on ne demande pas de le démontrer.

1°) Montrer que l'ensemble $P = \{n \in \mathbb{N}^*/\exists m \in \mathbb{N}^*,\ \ n = m^2\}$ des carrés parfaits est négligeable.

2°) a) Montrer que (a_n), définie par $a_n = n$ si $n \in P$ et $a_n = \frac{1}{n}$ sinon, est presque convergente vers 0.
b) Une sous-suite d'une suite presque convergente est-elle presque convergente ?

Dans les deux questions qui suivent, (a_n) est une suite de réels, $(b_n) = \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)$ est sa moyenne de Cesaro et on suppose que $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3°) On suppose dans cette question que les a_n sont positifs ou nuls.
a) Montrer qu'il existe une suite décroissante (u_n) de réels strictement positifs telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\frac{b_n}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
b) Soit $T = \{k \in \mathbb{N}^*/a_k \geq u_k\}$. Montrer que T est négligeable.
c) En déduire que a_n est presque convergente vers 0.

4°) Montrer que l'hypothèse de positivité en question 3 est essentielle en donnant un exemple de suite (a_n) de réels telle que $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors que $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 14.35 : (niveau 3)

1°) Si z est un complexe de module 1, montrer que 1 est une valeur d'adhérence de la suite $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2°) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $z_1, \dots, z_p$ p complexes de module 1. Montrer que p est une valeur d'adhérence de la suite $(z_1^n + \cdots + z_p^n)_{n\in\mathbb{N}}$.