Feuille d'exercices 13: Corrigé de deux exercices.

Exercice 13.13 :

Notons $(H) : y'' + 6y' + 9y = 0$. Il s'agit de l'équation homogène associée à (E).
Son polynôme caractéristique est $\chi(X) = X^2 + 6X + 9 = (X + 3)^2$, donc $t \longmapsto e^{-3t}$ est une solution de (H) qui ne s'annule jamais.
Soit y une application deux fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Conformément au cours, on va résoudre (E) en posant $y(t) = \lambda(t)e^{-3t}$. Ainsi,
$(E) \Longleftrightarrow 9\lambda e^{-3t} + 6(\lambda' - 3\lambda)e^{-3t} + e^{-3t}(\lambda'' - 3\lambda' - 3(\lambda' - 3\lambda)) = \dfrac{e^{-3t}}{\sqrt{1+t^2}}$, donc
$(E) \Longleftrightarrow \lambda'' = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \Longleftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \ \lambda' = \mathrm{argsh}(t) + \alpha$.
Par intégration par parties,
$\displaystyle\int \mathrm{argsh}(t)\ dt = t\mathrm{argsh}(t) - \int \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\ dt = t\mathrm{argsh}(t) - \sqrt{1+t^2} + \beta$,
donc $(E) \Longleftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \ \forall t \in \mathbb{R},\ \ \lambda(t) = t\mathrm{argsh}(t) - \sqrt{1+t^2} + \alpha t + \beta$, puis
$(E) \Longleftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \ \forall t \in \mathbb{R},\ \ y(t) = e^{-3t}(\alpha t + \beta + t\mathrm{argsh}(t) - \sqrt{1+t^2})$.

Exercice 13.14 :

$\diamond$ **Lemme :** Soit g et h deux applications de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Alors $f = g \Longleftrightarrow (f' = g'$ et $f(0) = g(0))$.
En effet, le sens direct est évident, et si $f' = g'$ et $f(0) = g(0)$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$\displaystyle f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\ dt = g(0) + \int_0^x g'(t)\ dt = g(x)$.
$\diamond$ Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Notons (E) l'équation fonctionnelle de l'énoncé. En posant $u = x - t$ dans l'intégrale, on obtient :
$\displaystyle (E) \Longleftrightarrow f(x) = x^2 + \int_0^x (x-u)f(u)\ du$, donc
$\displaystyle (E) \Longleftrightarrow f(x) = x^2 + x\int_0^x f(u)\ du - \int_0^x uf(u)\ du$.
$\diamond$ Supposons que f est solution de (E). Alors $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f(u)\ du$ et $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x uf(u)\ du$ sont de classe C^1, donc f est aussi de classe C^1. Mais alors $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f(u)\ du$ et $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x uf(u)\ du$ sont de classe C^2, donc f est de classe C^2. Ainsi, on peut se contenter de rechercher les solutions de (E) parmi les fonctions de classe C^2.

$\diamond$ Soit donc f une application de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. D'après le lemme, $(E) \Longleftrightarrow [f(0) = 0$ et $f'(x) = 2x + xf(x) + \displaystyle\int_0^x f(u)\ du - xf(x)]$, puis en utilisant à nouveau le lemme, $(E) \Longleftrightarrow [f(0) = 0, f'(0) = 0$ et $f''(x) = 2 + f(x)]$.
Notons $(F) : f'' = 2 + f \Longleftrightarrow (f + 2)'' = f + 2$.
D'après le cours, $(F) \Longleftrightarrow f + 2 = A\text{ch}x + B\text{sh}x$. Alors
$(E) \Longleftrightarrow [\exists A, B \in \mathbb{R},\ \ \forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = A\text{ch}x + B\text{sh}x - 2$ et $0 = A - 2, 0 = B]$,
donc $(E) \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = 2(\text{ch}x - 1)$.