

# DS 5 : Un corrigé

Le barème comporte un total de 63 points.

## Partie I : Projecteurs (sur 7 points)

1°) (sur 2 points)  $\diamond$  Soit  $x, y \in E$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$ .

Alors  $x = p(x) + q(x)$  et  $y = p(y) + q(y)$ , donc  $\alpha x + y = (\alpha p(x) + p(y)) + (\alpha q(x) + q(y))$  et  $(\alpha p(x) + p(y), \alpha q(x) + q(y)) \in F \times G$ . D'autre part,  $\alpha x + y = p(\alpha x + y) + q(\alpha x + y)$  avec  $(p(\alpha x + y), q(\alpha x + y)) \in F \times G$ , donc d'après l'unicité de la décomposition d'un vecteur selon  $F \oplus G$  (cf la dernière condition caractérisant le fait que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$ ),  $p(\alpha x + y) = \alpha p(x) + p(y)$  et  $q(\alpha x + y) = \alpha q(x) + q(y)$ .

On a montré que  $p, q \in L(E)$ .

$\diamond$  Soit  $x \in E$ .  $p(x) \in F$ , donc  $p(x) = p(x) + 0$  et  $p(x) = p(p(x)) + q(p(x))$ , avec  $(p(x), 0) \in F \times G$  et  $(p(p(x)), q(p(x))) \in F \times G$ . Ainsi, toujours d'après l'unicité de la décomposition de  $p(x)$  selon  $F \oplus G$ , on en déduit que  $p(p(x)) = p(x)$  et que  $q(p(x)) = 0$ , pour tout  $x \in E$ . Ceci prouve que  $p^2 = p$  et  $qp = 0$ .

De même, on montre que  $q^2 = q$  et  $pq = 0$ .

$\diamond$  Par définition de  $p$  et  $q$ , pour tout  $x \in E$ ,  $x = p(x) + q(x)$ , donc  $p + q = Id_E$ .

2°) (sur 2 points) Soit  $p \in L(E)$  tel que  $p^2 = p$ . Posons  $F = \text{Im}(p)$  et  $G = \text{Ker}(p)$ .

$\diamond$  Soit  $x \in E$  tel que  $p(x) = x$ . Alors  $x = p(x) \in \text{Im}(p) = F$ .

Réciproquement, si  $x \in F = \text{Im}(p)$ , il existe  $y \in E$  tel que  $x = p(y)$ ,

donc  $p(x) = p \circ p(y) = p(y) = x$  car  $p$  est un projecteur.

Ainsi  $x \in F \iff p(x) = x \iff (Id_E - p)(x) = 0$  et  $\text{Im}(p) = F = \text{Ker}(Id_E - p)$ .

$\diamond$  Soit  $x \in E$ .  $p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = 0$ , car  $p$  est un projecteur, donc  $x - p(x) \in \text{Ker}(p)$ . De plus  $p(x) \in \text{Im}(p)$ , donc  $x = \underbrace{p(x)}_{\in F} + \underbrace{(x - p(x))}_{\in G}$ .

Ceci démontre que  $E = F + G$ .

$\diamond$  Soit  $x \in F \cap G$ . Alors  $p(x) = x$  et  $p(x) = 0$ , donc  $x = 0$ . Ainsi  $F \cap G = \{0\}$ .

On a montré que  $E = F \oplus G$ , d'après la seconde caractérisation donnée par l'énoncé.

$\diamond$  On peut donc considérer le projecteur  $u$  sur  $F$  parallèlement à  $G$ .

Soit  $x \in E$ . On a vu que  $x = p(x) + (x - p(x))$  avec  $p(x) \in F$  et  $x - p(x) \in G$ , donc  $u(x) = p(x)$ . Ainsi,  $p = u$  est bien le projecteur sur  $\text{Im}(p)$  parallèlement à  $\text{Ker}(p)$ .

3°) (sur 1 point)

- Pour tout  $x \in E$ ,  $Id_E^2(x) = x$  donc  $Id_E^2 = Id_E$ . Ainsi, d'après la question précédente,  $Id_E$  est le projecteur sur  $\text{Im}(Id_E) = Id_E(E) = E$  parallèlement à  $\text{Ker}(Id_E) = \{0\}$ .
- De même, pour tout  $x \in E$ ,  $0^2(x) = 0 = 0(x)$  donc  $0^2 = 0$ , donc  $0$  est le projecteur sur  $\text{Im}(0) = \{0\}$  parallèlement à  $\text{Ker}(0) = E$ .
- Pour tout  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2$ ,  $p \circ p \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ , donc  $p^2 = p$ , ce qui prouve que  $p$  est un projecteur. De plus,  $\text{Im}(p) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{K} \right\} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\text{Ker}(p) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / x = 0 \right\} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Ainsi,  $p_1$  est le projecteur sur  $\text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  parallèlement à  $\text{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

4°) (sur 2 points) D'après le cours,  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. De plus, on vérifie facilement que  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{I}$  sont non vides et stables par combinaison linéaire, donc ce sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .

Soit  $f \in \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$ . Alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = f(-x) = -f(x)$ , donc  $f(x) = 0$ . Ainsi  $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0\}$ . De plus, si  $f \in E$ , en posant pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$  et  $h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$ , on vérifie que  $f = g + h$ ,  $g \in \mathcal{P}$  et  $h \in \mathcal{I}$ . Ainsi d'après l'énoncé, on a montré que  $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$ .

On peut donc définir le projecteur  $p$  sur  $\mathcal{P}$  parallèlement à  $\mathcal{I}$ , et ce qui précède montre que, pour tout  $f \in E$  et  $x \in \mathbb{R}$ ,  $p(f)(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ .

## Partie II : Trace d'un endomorphisme (sur 19 points)

5°) (sur 3 points)  $\diamond$  Soit  $i \in \mathbb{N}_n$ . Commençons par montrer que  $e_i^*$  est bien une forme linéaire (elle est bien à valeurs dans  $\mathbb{K}$ ). Soit  $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$  et  $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$  deux vecteurs

de  $E$  et soit  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Alors  $\alpha x + y = \sum_{j=1}^n (\alpha x_j + y_j) e_j$ ,

donc  $e_i^*(\alpha x + y) = \alpha x_i + y_i = \alpha e_i^*(x) + e_i^*(y)$ , ce qui prouve que  $e_i^*$  est bien linéaire.

$\diamond$  Ainsi,  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  est une famille de  $n$  vecteurs de  $E^*$ .

D'après le cours,  $\dim(L(E, \mathbb{K})) = \dim(E) \times \dim(\mathbb{K}) = \dim(E) = n$ , donc pour montrer que c'est une base, il suffit de montrer que c'est une famille libre : soit  $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$

telle que  $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^* = 0$ . Ainsi, pour tout  $x \in E$ ,  $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^*(x) = 0$ . C'est en particulier vrai pour  $e_j$ , où  $j \in \mathbb{N}_n$ . Or  $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$  (c'est la  $i$ -ème coordonnée de  $e_j$  dans la base  $e$ ), donc  $0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^*(e_j) = \alpha_j$ . Ceci prouve que la famille est bien libre, ce qui conclut.

6°) (sur 3 points)  $\diamond$  Soit  $u \in L(E, F)$ . Pour tout  $x \in E$ ,

$$u(x) = u\left(\sum_{k=1}^n e_k^*(x)e_k\right) = \sum_{k=1}^n e_k^*(x)u(e_k) = \sum_{k=1}^n e_k^*(x) \sum_{j=1}^p f_j^*(u(e_k))f_j, \text{ donc}$$

$$u(x) = \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^n e_k^*(x)f_j^*(u(e_k))f_j = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} f_j^*(u(e_k))g_{k,j}(x). \text{ Ainsi } u = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} f_j^*(u(e_k))g_{k,j}.$$

$\diamond$  Les  $e_i^*$  étant linéaires, on vérifie aisément que les  $g_{i,j}$  sont linéaires. Ainsi, ce qui précède prouve que la famille  $(g_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  est génératrice de  $L(E, F)$ . De plus son cardinal est égal à  $np = \dim(L(E, F))$ , donc c'est une base de  $L(E, F)$ .

7°) (sur 3 points pour les questions 7 et 8)

Soit  $u, v \in L(E)$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$ . D'après la linéarité des  $e_i^*$ , on a

$$\text{Tr}_e(\alpha u + v) = \sum_{i=1}^n e_i^*(\alpha u(e_i) + v(e_i)) = \alpha \sum_{i=1}^n e_i^*(u(e_i)) + \sum_{i=1}^n e_i^*(v(e_i)) = \alpha \text{Tr}_e(u) + \text{Tr}_e(v).$$

De plus  $\text{Tr}_e$  est une application de  $L(E)$  dans  $\mathbb{K}$ , donc c'est bien une forme linéaire sur  $L(E)$ .

$$8^\circ) \diamond \text{Tr}_e(uv) = \sum_{i=1}^n e_i^*(u(v(e_i))), \text{ or pour tout } i \in \mathbb{N}_n, v(e_i) = \sum_{j=1}^n e_j^*(v(e_i))e_j, \text{ donc}$$

$$\text{par linéarité de } u \text{ et des } e_i^*, \text{ on obtient que (1) : } \text{Tr}_e(uv) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n e_j^*(v(e_i))e_i^*(u(e_j)).$$

$\diamond$  En utilisant le changement de variable  $(i, j) \mapsto (j, i)$  qui est bien bijectif de  $\mathbb{N}_n^2$  dans lui-même, on en déduit que  $\text{Tr}_e(uv) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n e_i^*(v(e_j))e_j^*(u(e_i))$ , puis en intervertissant

$$\text{les deux sommes, } \text{Tr}_e(uv) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n e_j^*(u(e_i))e_i^*(v(e_j)). \text{ Or si l'on applique la relation}$$

$$(1) \text{ en remplaçant } (u, v) \text{ par } (v, u), \text{ on obtient que } \text{Tr}_e(vu) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n e_j^*(u(e_i))e_i^*(v(e_j)),$$

donc on a montré que  $\text{Tr}_e(uv) = \text{Tr}_e(vu)$ .

9°)  $\diamond$  (sur 3 points)  $v$  transforme la base  $e$  en la base  $f$ , donc d'après le cours,  $v$  est un automorphisme de  $E$ . En particulier,  $v^{-1}$  est bien défini et pour tout  $i \in \mathbb{N}_n$ ,  $v^{-1}(f_i) = e_i$ . Ainsi,

$$\text{Tr}_f(vuv^{-1}) = \sum_{i=1}^n f_i^*(vuv^{-1}(f_i)) = \sum_{i=1}^n f_i^*(vu(e_i)), \text{ or pour tout } i \in \mathbb{N}_n,$$

$$u(e_i) = \sum_{j=1}^n e_j^*(u(e_i))e_j, \text{ donc par linéarité de } v \text{ et des } f_i^*,$$

$$\text{Tr}_f(vuv^{-1}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n e_j^*(u(e_i))f_i^*(v(e_j)), \text{ or pour tout } i, j \in \mathbb{N}_n,$$

$f_i^*(v(e_j)) = f_i^*(f_j) = \delta_{i,j}$ , donc  $\text{Tr}_f(vuv^{-1}) = \sum_{i=1}^n e_i^*(u(e_i)) = \text{Tr}_e(u)$ , ce qu'il fallait

démontrer.

◇ (sur 1 point) D'après la question 8, appliquée avec la base  $f$ , et en remplaçant le couple  $(u, v)$  par  $(v, uv^{-1})$ ,  $\text{Tr}_f(v(uv^{-1})) = \text{Tr}_f((uv^{-1})v) = \text{Tr}_f(u)$ , donc d'après le point précédent,  $\text{Tr}_f(u) = \text{Tr}_e(u)$ .

**10°** (sur 2 points) ◇ Notons  $a = \dim(F)$ . D'après le cours,  $F$  possède au moins une base, de cardinal  $a$ , que l'on notera  $(e_1, \dots, e_a)$ . De même,  $G$  possède au moins une base, notée  $(e_{a+1}, \dots, e_n)$ . Posons  $e = (e_1, \dots, e_n)$  et montrons que  $e$  est une base de  $E$ .

◇ Soit  $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$  tel que  $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = 0$ . Posons  $x = \sum_{i=1}^a \alpha_i e_i$  et  $y = \sum_{i=a+1}^n \alpha_i e_i$ . Alors

$x + y = 0$ , donc  $x = -y \in F \cap G = \{0\}$ . Ainsi,  $\sum_{i=1}^a \alpha_i e_i = 0$  et  $\sum_{i=a+1}^n \alpha_i e_i = 0$ , or les familles  $(e_1, \dots, e_a)$  et  $(e_{a+1}, \dots, e_n)$  sont libres, donc pour tout  $i \in \mathbb{N}_n$ ,  $\alpha_i = 0$ . Ceci prouve que  $e$  est libre.

◇ Soit  $z \in E$ . Alors il existe  $x \in F$  et  $y \in G$  tels que  $z = x + y$ . Or  $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_a)$  et  $G = \text{Vect}(e_{a+1}, \dots, e_n)$ , donc il existe  $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$  tel que  $x = \sum_{i=1}^a \alpha_i e_i$

et  $y = \sum_{i=a+1}^n \alpha_i e_i$ . Alors  $z = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ . Ceci prouve que  $e$  est génératrice de  $E$ . C'est donc bien une base de  $E$ .

◇ Ainsi,  $\text{Tr}(p) = \text{Tr}_e(p) = \sum_{i=1}^n e_i^*(p(e_i))$ . Or, lorsque  $i \in \mathbb{N}_a$ ,  $e_i \in F = \text{Im}(p)$ , donc d'après la question 2,  $p(e_i) = e_i$ , puis  $e_i^*(p(e_i)) = 1$  et lorsque  $i \in \{a+1, \dots, n\}$ ,  $e_i \in G = \text{Ker}(p)$ , donc  $p(e_i) = 0$ , puis  $e_i^*(p(e_i)) = 0$ . Ainsi,  $\text{Tr}(p) = \sum_{i=1}^a 1 = a = \dim(F)$ .

**11°** (sur 4 points)

Reprenons les notations de la question 6. On a vu que  $g = (g_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  est une base de  $L(E, F)$  et que pour tout  $u \in L(E, F)$ ,  $u = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} f_j^*(u(e_k)) g_{k,j}$ , donc si l'on note

$(g_{i,j}^*)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  la base duale de  $g$ , on voit que, pour tout  $u \in L(E, F)$  et  $k, j \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p$ ,  $g_{k,j}^*(u) = f_j^*(u(e_k))$ .

Ainsi,  $\text{Tr}(\Psi) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} g_{k,j}^*(\Psi(g_{k,j})) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} g_{k,j}^*(v g_{k,j} u) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} f_j^*[v g_{k,j} u(e_k)]$ , puis

$\text{Tr}(\Psi) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} f_j^*[v(e_k^*(u(e_k)) f_j)] = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} e_k^*(u(e_k)) \times f_j^*[v(f_j)]$ . Ainsi,

$$\text{Tr}(\Psi) = \left( \sum_{k=1}^n e_k^*(u(e_k)) \right) \times \left( \sum_{j=1}^n f_j^*(v(f_j)) \right) = \text{Tr}(u) \times \text{Tr}(v).$$

## Partie III : Formule de Burnside (sur 22 points)

**12°** (sur 2 points)  $\diamond$  Supposons que  $(E, \rho)$  est une représentation linéaire de  $\Gamma$ .

Soit  $x, y \in E$ ,  $\gamma, \gamma' \in \Gamma$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

$\rho(\gamma)$  est linéaire, donc  $\gamma.(x + y) = \rho(\gamma)(x + y) = \rho(\gamma)(x) + \rho(\gamma)(y) = \gamma.x + \gamma.y$ , et  $\gamma.(\lambda x) = \rho(\gamma)(\lambda x) = \lambda \rho(\gamma)(x) = \lambda(\gamma.x)$ .

De plus,  $\rho$  est un morphisme de groupes, donc  $\rho(1_\Gamma) = \text{Id}_E$  et  $\rho(\gamma\gamma') = \rho(\gamma)\rho(\gamma')$ .

On en déduit que  $1_\Gamma.x = \rho(1_\Gamma)(x) = \text{Id}_E(x) = x$

et  $\gamma.(\gamma'.x) = \rho(\gamma)[\rho(\gamma')(x)] = \rho(\gamma\gamma')(x) = (\gamma\gamma').x$ .

$\diamond$  Réciproquement, supposons que pour tout  $x, y \in E$ ,  $\gamma, \gamma' \in \Gamma$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,

$\gamma.(x + y) = \gamma.x + \gamma.y$ ,  $\gamma.(\lambda x) = \lambda(\gamma.x)$ ,  $1_\Gamma(x) = x$  et  $\gamma.(\gamma'.x) = (\gamma\gamma').x$ .

Les deux premières propriétés assurent que, pour tout  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\rho(\gamma) \in L(E)$ .

D'après les deux dernières propriétés, pour tout  $\gamma \in \Gamma$ , pour tout  $x \in E$ ,

$\gamma^{-1}.(\gamma.x) = x = \gamma.(\gamma^{-1}.x)$ , donc  $\rho(\gamma)$  et  $\rho(\gamma^{-1})$  sont deux bijections réciproques l'une de l'autre. Ainsi,  $\rho$  est une application de  $\Gamma$  dans  $GL(E)$ . Enfin, la dernière propriété garantit que  $\rho$  est un morphisme de groupes.

**13°**  $\diamond$  (sur 2 points) Soit  $\gamma' \in \Gamma$ , on a

$$\rho(\gamma') \circ \pi = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \rho(\gamma') \circ \rho(\gamma) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \rho(\gamma'\gamma) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma'' \in \Gamma} \rho(\gamma'') = \pi \text{ car } \gamma \mapsto \gamma'\gamma \text{ est}$$

une bijection de  $\Gamma$  sur lui-même, dont la bijection réciproque est  $\gamma \mapsto \gamma'^{-1}\gamma$ .

$\diamond$  (sur 3 points) On en déduit que  $\pi \circ \pi = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma' \in \Gamma} \rho(\gamma') \circ \pi = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \pi = \pi$ , donc  $\pi$

est un projecteur.

Si  $x \in E_\Gamma$ , pour tout  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\gamma.x = x$ , donc  $\pi(x) = x$ . Ceci prouve que  $E_\Gamma \subset \text{Im}\pi$ .

Réciproquement : si  $x \in \text{Im}\pi$  alors d'après la question 2,  $\pi(x) = x$  donc, pour tout  $\gamma' \in \Gamma$ , en utilisant que  $\rho(\gamma')\pi = \pi$ , on obtient  $\gamma'.x = \rho(\gamma')(x) = \rho(\gamma') \circ \pi(x) = \pi(x) = x$  et donc  $x \in E_\Gamma$ . On a ainsi prouvé que  $E_\Gamma = \text{Im}\pi$ .

$\diamond$  D'après la question 10, la trace d'un projecteur est égale à la dimension de son image, donc  $\text{Tr}(\pi) = \dim(E_\Gamma)$ .

**14°** (sur 1 point) Soient  $(E, \rho)$  et  $(E', \rho')$  deux  $\Gamma$ -espaces tels que  $\chi_E = \chi_{E'} = \chi$ .

$\chi(1_\Gamma) = \chi_E(1_\Gamma) = \text{Tr}(\rho(1_\Gamma)) = \text{Tr}(\text{Id}_E) = \dim(E)$  et  $\chi(1_\Gamma) = \chi_{E'}(1_\Gamma) = \dim(E')$ ,

donc  $\dim(E) = \dim(E') = \dim(\chi) = \chi(1_\Gamma)$ .

**15°** (sur 1 point) L'application trace étant linéaire, on a

$$\dim(E_\Gamma) = \text{Tr}(\pi) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \text{Tr}(\rho(\gamma)) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \chi_E(\gamma)..$$

**16°** (sur 1 point) Soit  $x, y, z \in X$ .

$\diamond$   $x = 1_\Gamma.x$ , donc  $x R x$ . Ainsi,  $R$  est réflexive.

◇ Supposons que  $x R y$ . Il existe  $\gamma \in \Gamma$  tel que  $y = \gamma.x$ .

Alors  $\gamma^{-1}.y = \gamma^{-1}.(\gamma.x) = (\gamma^{-1}\gamma).x = 1_\Gamma.x = x$ , donc  $y R x$ . Ainsi,  $R$  est symétrique.

◇ Supposons que  $x R y$  et que  $y R z$ . Il existe  $\gamma, \gamma' \in \Gamma$  tels que  $y = \gamma.x$  et  $z = \gamma'.y$ , donc  $z = \gamma'.(\gamma.x) = (\gamma'\gamma).x$ . Ainsi,  $x R z$ , donc  $R$  est transitive.

En conclusion, on a prouvé que  $R$  est une relation d'équivalence.

**17°)** ◇ (sur 1 point) Soit  $\gamma \in \Gamma$ .  $(e_x)_{x \in X}$  est une base de  $\mathbb{K}^X$ , donc d'après le cours, il existe un unique endomorphisme  $\rho(\gamma)$  de  $\mathbb{K}^X$  tel que, pour tout  $x \in X$ ,  $\rho(\gamma)(e_x) = e_{\gamma.x}$ . Soit  $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ . Alors  $\gamma.(\gamma'.e_x) = \gamma(e_{\gamma'.x}) = e_{\gamma.(\gamma'.x)} = e_{(\gamma\gamma').x} = (\gamma\gamma').e_x$ , donc  $\rho(\gamma) \circ \rho(\gamma') = \rho(\gamma\gamma')$ .

En particulier,  $\rho(\gamma)\rho(\gamma^{-1}) = \rho(1_\Gamma) = \text{Id}_{\mathbb{K}^X} = \rho(\gamma^{-1})\rho(\gamma)$ , donc  $\rho(\gamma)$  est un automorphisme de  $\mathbb{K}^X$  et on vient de montrer que  $\rho$  est bien un morphisme de  $\Gamma$  dans  $GL(\mathbb{K}^X)$ .

◇ (sur 2 points) Soit  $f \in \mathbb{K}^X$ . Il existe  $(\lambda_x)_{x \in X} \in \mathbb{K}^X$  tel que  $f = \sum_{x \in X} \lambda_x e_x$ . Alors

pour tout  $x \in X$ ,  $f(x) = \lambda_x$ , donc : pour tout  $f \in \mathbb{K}^X$  et  $x \in X$ ,  $e_x^*(f) = f(x)$ .

Soit  $f \in \mathbb{K}^X$ ,  $\gamma \in \Gamma$  et  $x \in X$ .  $(\gamma.f)(x) = e_x^*(\gamma.f)$ , or  $\gamma.f = \gamma. \sum_{y \in X} f(y)e_y = \sum_{y \in X} f(y)e_{\gamma.y}$ ,

mais  $\gamma.y = x \iff y = \gamma^{-1}.x$ , donc  $(\gamma.f)(x) = f(\gamma^{-1}.x)$ , ce qui correspond bien à l'affirmation de l'énoncé.

**18°)** (sur 4 points) Soit  $f \in \mathbb{K}^X$ . Alors  $f \in E_\Gamma$  si et seulement si  $\forall \gamma \in \Gamma$ ,  $\gamma.f = f$ , c'est-à-dire si et seulement si  $\forall \gamma \in \Gamma$ ,  $\forall x \in X$ ,  $f(\gamma^{-1}.x) = f(x)$ .

Mais l'application  $\gamma \mapsto \gamma^{-1}$  est une bijection sur  $\Gamma$ , donc  $f \in E_\Gamma$  si et seulement si  $\forall x \in X$ ,  $\forall \gamma \in \Gamma$ ,  $f(\gamma.x) = f(x)$ .

Pour tout  $x \in X$ , notons  $\bar{x}$  l'orbite de  $x$  :  $\bar{x} = \{\gamma.x / \gamma \in \Gamma\}$ .

Alors  $f \in E_\Gamma \iff [\forall x \in X, \forall y \in \bar{x}, f(x) = f(y)]$ .

Ceci montre que les éléments de  $E_\Gamma$  sont exactement les applications de  $X$  dans  $\mathbb{K}$  possédant une valeur constante sur chaque orbite.

◇ Pour tout  $x \in X$ , notons  $f_{\bar{x}} = \sum_{y \in \bar{x}} e_y$ .

Montrons que  $(f_z)_{z \in X/R}$  est une base de  $E_\Gamma$ .

Si  $f \in E_\Gamma$ , en notant  $\lambda_z$  la valeur constante de  $f$  sur l'orbite  $z$ , on peut écrire

$f = \sum_{z \in X/R} \lambda_z f_z$ . De plus, pour tout  $z \in X/R$ ,  $f_z \in E_\Gamma$ , donc  $(f_z)_{z \in X/R}$  est une famille génératrice de  $E_\Gamma$ .

Supposons que  $\sum_{z \in X/R} \lambda_z f_z = 0$ . Pour tout  $x \in X$ , posons  $\lambda_x = \lambda_{\bar{x}}$ .

Alors  $0 = \sum_{z \in X/R} \lambda_z f_z = \sum_{x \in X} \lambda_x e_x$ , or  $(e_x)$  est libre, donc les  $\lambda_x$  sont tous nuls, puis

également les  $\lambda_z$ . Ainsi,  $(f_z)_{z \in X/R}$  est libre. C'est bien une base de  $E_\Gamma$ .

◇ Alors  $\dim(E_\Gamma) = |X/R|$ , ce qu'il fallait démontrer.

**19°)** ◇ (sur 1 point) Soit  $\gamma \in \Gamma$ . Pour tout  $x \in X$ ,  $\rho(\gamma)(e_x) = \gamma.e_x = e_{\gamma.x}$ , donc

$\text{Tr}(\rho(\gamma)) = \sum_{x \in X} e_x^*(\rho(\gamma)(e_x)) = \sum_{x \in X} e_x^*(e_{\gamma.x}) = \sum_{x \in X} \delta_{x, \gamma.x} = r_\gamma$ .

On a bien montré que  $\chi_X(\gamma) = r_\gamma$ .

◇ (sur 1 point) D'après la question 18, puis la question 15,  $s = \dim(E_\Gamma) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \chi_X(\gamma)$ ,

donc d'après le point précédent,  $\frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} r_\gamma = s$ , d'où le résultat demandé : la formule

de Burnside exprime donc le fait que le nombre d'orbites d'un ensemble  $X$  sous l'action d'un groupe est égal à la valeur moyenne du nombre d'éléments de  $X$  invariants sous l'action de  $\gamma$ , lorsque  $\gamma$  parcourt tout le groupe.

**20°)** (sur 3 points)  $\Gamma$  agit transitivement, donc  $s = 1$  et la formule de Burnside devient :  $\sum_{\gamma \in \Gamma} r_\gamma = |\Gamma|$ .

Or, lorsque  $\gamma = 1_\Gamma$ ,  $r_\gamma = |X| \geq 2$ .

Supposons que  $r_\gamma \geq 1$  pour tout  $\gamma \in \Gamma$  alors

$|\Gamma| = \sum_{\gamma \in \Gamma} r_\gamma = r_{1_\Gamma} + \sum_{\gamma \neq 1_\Gamma} r_\gamma \geq |X| + (|\Gamma| - 1) \geq |\Gamma| + 1$ , ce qui est impossible donc il existe  $\gamma_0$  dans  $\Gamma$  tel que  $r_{\gamma_0} = 0$ . Alors, pour tout  $x \in X$ ,  $\gamma_0.x \neq x$ .

## Partie IV : Propriétés des caractères (sur 15 points)

**21°)** (sur 1 point) Avec des notations qui parlent d'elles-mêmes,

pour tout  $\gamma \in \Gamma$  et  $u \in L(E, F)$ ,  $\gamma.u = \rho_F(\gamma) \circ u \circ [\rho_E(\gamma)]^{-1}$ .

On en déduit que, pour tout  $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ , pour tout  $u, v \in L(E, F)$ , pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,

- $\gamma.u \in L(E, F)$  ;
- $\gamma.(\lambda u + v) = \rho_F(\gamma)(\lambda u + v)[\rho_E(\gamma)]^{-1} = \lambda \rho_F(\gamma)u[\rho_E(\gamma)]^{-1} + \rho_F(\gamma)v[\rho_E(\gamma)]^{-1}$ , car  $\rho_F(\gamma)$  est linéaire, donc  $\gamma.(\lambda u + v) = \lambda(\gamma.u) + (\gamma.v)$  ;
- $1_\Gamma.u = u$  ;
- $\gamma.(\gamma'.u) = \rho_F(\gamma)\rho_F(\gamma') \circ u \circ [\rho_E(\gamma')]^{-1} \circ [\rho_E(\gamma)]^{-1} = \rho_F(\gamma\gamma') \circ u \circ [\rho_E(\gamma\gamma')]^{-1}$ , donc  $\gamma.(\gamma'.u) = (\gamma\gamma').u$ .

Ceci prouve d'après la question 12 que  $(\gamma, u) \mapsto \gamma.u$  est une représentation linéaire de  $\Gamma$  sur  $L(E, F)$ .

**22°)** (sur 1 point)

Soit  $\gamma \in \Gamma$ .  $\chi_{L(E, F)}(\gamma) = \text{Tr}(\rho_{L(E, F)}(\gamma)) = \text{Tr}(u \mapsto \rho_F(\gamma) \circ u \circ [\rho_E(\gamma)]^{-1})$ , donc d'après la question 11,  $\chi_{L(E, F)}(\gamma) = \text{Tr}(\rho_F(\gamma))\text{Tr}(\rho_E(\gamma^{-1})) = \chi_E(\gamma^{-1})\chi_F(\gamma)$ .

**23°)** ◇ (sur 1 point)  $\gamma \mapsto \gamma^{-1}$  est une bijection de  $\Gamma$  donc par changement de variables,

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)g(\gamma^{-1}) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma^{-1})g(\gamma) = \langle g, f \rangle.$$

◇ (sur 1 point) Soit  $f \in \mathbb{K}^\Gamma$  telle que  $\langle f, g \rangle = 0$  pour tout  $g \in \mathbb{K}^\Gamma$ . Montrons que  $f = 0$ . Soit  $\gamma' \in \Gamma$ .

Notons  $g$  l'application de  $\Gamma$  dans  $\mathbb{K}$  définie par  $g(\gamma) = \begin{cases} |\Gamma| & \text{si } \gamma = \gamma'^{-1} \\ 0 & \text{si } \gamma \neq \gamma'^{-1} \end{cases}$ .

Alors  $0 = \langle f, g \rangle = f(\gamma')$ . C'est vrai pour tout  $\gamma' \in \Gamma$ , donc  $f = 0$ .

**24°)** (sur 4 points) D'après la question précédente,

$$\langle \chi_E, \chi_F \rangle = \langle \chi_F, \chi_E \rangle = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \chi_E(\gamma^{-1}) \chi_F(\gamma), \text{ donc d'après la question 22,}$$

$$\langle \chi_E, \chi_F \rangle = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \chi_{\mathcal{L}(E,F)}(\gamma), \text{ puis d'après la question 15, } \langle \chi_E, \chi_F \rangle = \dim(L(E, F)_\Gamma)$$

où  $L(E, F)_\Gamma = \{u \in L(E, F) / \forall \gamma \in \Gamma, \gamma.u = u\}$ .

Or, lorsque  $\varphi \in L(E, F)$ ,

$$\begin{aligned} \varphi \in L(E, F)_\Gamma &\iff (\forall \gamma \in \Gamma, \forall x \in E, \gamma.\varphi(\gamma^{-1}x) = \varphi(x)) \\ &\iff (\forall \gamma \in \Gamma, \forall x \in E, \varphi(\gamma^{-1}x) = \gamma^{-1}.\varphi(x)) \\ &\iff (\varphi \in \text{hom}_\Gamma(E, F)) \end{aligned}$$

donc  $\text{hom}_\Gamma(E, F)$  est un sous-espace vectoriel de  $L(E, F)$ ,

et  $\langle \chi_E, \chi_F \rangle = \dim(\text{hom}_\Gamma(E, F))$ .

◇ On suppose que  $E \neq \{0\}$ . Alors  $\text{Id}_E \neq 0$ , or  $\text{Id}_E \in L(E)_\Gamma$  car pour tout  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\gamma.\text{Id}_E = \rho_E(\gamma)\text{Id}_E\rho_E(\gamma^{-1}) = \rho_E(\gamma\gamma^{-1}) = \text{Id}_E$ , donc  $L(E)_\Gamma \neq \{0\}$ . On en déduit que  $\langle \chi_E, \chi_E \rangle = \dim(L(E)_\Gamma) \in \mathbb{N}^*$ .

**25°)** (sur 2 points) ◇ D'après la question 12, on munit  $\mathbb{K}$  d'une structure de  $\Gamma$ -espace en définissant  $\gamma.x = x$  pour tout  $\gamma \in \Gamma$  et tout  $x \in \mathbb{K}$ , c'est-à-dire  $\rho(\gamma) = \text{Id}_\mathbb{K}$  pour tout  $\gamma \in \Gamma$ . Alors, pour tout  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\chi_\mathbb{K}(\gamma) = \text{Tr}(\text{Id}_\mathbb{K}) = 1 = \chi_{\text{unit}}(\gamma)$ , donc  $\chi_{\text{unit}}$  est bien un caractère.

◇ Par définition de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $\langle \chi_E, \chi_{\text{unit}} \rangle = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \chi_E(\gamma)$ , donc d'après la question 15,

$$\langle \chi_E, \chi_{\text{unit}} \rangle = \dim(E_\Gamma)$$

**26°)** (sur 3 points) Il existe des  $\Gamma$ -espaces  $E$  et  $F$  tels que  $\chi = \chi_E$  et  $\chi' = \chi_F$ .

Pour tout  $(x, y) \in E \times F$  et  $\gamma \in \Gamma$ , posons  $\gamma.(x, y) = (\gamma.x, \gamma.y)$ .

On vérifie aisément que, pour tout  $(x, y), (x', y') \in E \times F$ ,  $\lambda \in K$ ,  $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ ,

$$\gamma.[(x, y) + (x', y')] = \gamma.(x, y) + \gamma.(x', y'), \quad \gamma.[\lambda(x, y)] = \lambda[\gamma.(x, y)],$$

$$1_\Gamma.(x, y) = (x, y) \text{ et } (\gamma\gamma').(x, y) = \gamma.[\gamma'.(x, y)].$$

On a ainsi défini une représentation linéaire de  $\Gamma$  sur  $E \times F$ .

Notons  $e = (e_1, \dots, e_n)$  et  $f = (f_1, \dots, f_p)$  des bases de  $E$  et de  $F$  respectivement.

Pour tout  $(x, y) \in E \times F$ ,

$$(x, y) = \left( \sum_{i=1}^n e_i^*(x)e_i, \sum_{j=1}^p f_j^*(y)f_j \right) = \sum_{i=1}^n e_i^*(x)(e_i, 0) + \sum_{j=1}^p f_j^*(y)(0, f_j),$$

donc  $b = ((e_1, 0), \dots, (e_n, 0), (0, f_1), \dots, (0, f_p))$  est une famille génératrice de  $E \times F$ , de cardinal  $n + p = \dim(E \times F)$ . C'est donc une base de  $E \times F$  et l'égalité précédente montre que, pour tout  $i \in \mathbb{N}_n$  et  $j \in \mathbb{N}_p$ , pour tout  $(x, y) \in E \times F$ ,  $b_i^*(x, y) = e_i^*(x)$  et  $b_{n+j}^*(x, y) = f_j^*(y)$ .

Soit  $\gamma \in \Gamma$ .  $\chi_{E \times F}(\gamma) = \text{Tr}(\rho_{E \times F}(\gamma)) = \sum_{k=1}^{n+p} b_k^*(\gamma.b_k) = \sum_{i=1}^n e_i^*(\gamma.e_i) + \sum_{j=1}^p f_j^*(\gamma.f_j)$ , donc

$\chi_{E \times F}(\gamma) = \text{Tr}(\rho_E(\gamma)) + \text{Tr}(\rho_F(\gamma))$ . Ainsi,  $\chi_{E \times F} = \chi_E + \chi_F$ , ce qui prouve que  $\chi + \chi'$  est bien un caractère.

**27°)** (sur 1 point) Il existe un  $\Gamma$ -espace  $E$  tel que  $\chi = \chi_E$ .

On reprend la structure de  $\Gamma$ -espace définie sur  $\mathbb{K}$  en question 25.

On a  $\chi_{E^*} = \chi_{L(E, \mathbb{K})} = \chi_E^* \cdot \chi_{\mathbb{K}}$ , d'après la question 22. Ainsi,  $\chi_{E^*} = \chi_E^* \cdot \chi_{unit} = \chi_E^*$ .

On a donc montré que  $\chi_E^* = \chi_{E^*}$ , ce qui prouve que  $\chi^*$  est un caractère.

**28°)** (sur 1 point) Il existe des  $\Gamma$ -espaces  $E$  et  $F$  tels que  $\chi = \chi_E$  et  $\chi' = \chi_F$ .

Alors comme  $(\chi^*)^* = \chi$ , on a  $\chi\chi' = (\chi^*)^*\chi' = \chi_{E^*}^*\chi_F = \chi_{L(E^*, F)}$ ,

donc  $\chi\chi'$  est un caractère.

Ce problème est une adaptation d'un sujet donné à l'ENS Lyon en 1997. Les parties I et II mettent en place des notions qui feront plus tard partie de votre cours d'algèbre linéaire. Les parties III et IV correspondent aux parties I et II du sujet d'ENS. Ce dernier possède encore 2 parties qui développent la théorie des représentations linéaires de groupes. Le sujet ainsi qu'un corrigé sont facilement accessibles sur internet.