DM 20. Enoncé

Problème 1 : Endomorphimes u tels que $u^2 = ku$.

On se place dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel noté E.
On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont supplémentaires si et seulement si $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$.
On fixe $k \in \mathbb{R}$ et on note $A_k = \{u \in L(E) \ / \ u^2 = ku\}$.

1°) On note $GL(E)$ le groupe des éléments inversibles de l'anneau $L(E)$.
Déterminer $A_k \cap GL(E)$.

2°) Soit $u \in A_k$.
a) Si $x \in \mathrm{Im}(u)$, calculer $u(x)$.
b) Lorsque $k \neq 0$, montrer que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont supplémentaires.
Que dire de $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ lorsque $k = 0$?

3°) Soient u et v deux endomorphismes de A_k.
Pour toute cette question, on suppose que $k \neq 0$.
a) Montrer que $uv + vu = 0$ implique $uv = vu = 0$.
b) À quelle condition nécessaire et suffisante $u + v$ appartient-il à A_k ?
Montrer que dans ce cas, $\mathrm{Im}(u + v) = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$ et $\mathrm{Ker}(u + v) = \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v)$.
c) On suppose que $uv = vu$. Montrer qu'il existe $k' \in \mathbb{R}$ tel que $uv \in A_{k'}$.
Calculer $\mathrm{Im}(uv)$ et $\mathrm{Ker}(uv)$ en fonction des noyaux et images de u et de v.

4°) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et f un endomorphisme de E tel que $f^2 - af + bId_E = 0$.
On suppose que f n'est pas une homothétie.
a) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$, et $k, k' \in \mathbb{R}$ tels que $f - \lambda_1 Id_E \in A_k$ et $f - \lambda_2 Id_E \in A_{k'}$.
Dans ce cas, préciser k et k' en fonction de λ_1 et λ_2.
b) Montrer que dans ce cas, en posant $u = f - \lambda_1 Id_E$ et $v = f - \lambda_2 Id_E$, on a $uv = vu = 0$. Expliquer ce résultat en considérant l'endomorphime $u - v$.
c) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, calculer f^p en fonction de u et v.
d) À quelle condition nécessaire et suffisante f est-il inversible ?
Quel est alors son inverse ?

5°) Soit $g \in L(E)$ tel que $\mathrm{Im}(g)$ est une droite vectorielle.
Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $g \in A_k$.

6°) On suppose pour cette question que E est l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Soit $F \in E \setminus \{0\}$.

Pour tout $G \in E$, pour tout $x \in [0,1]$, on note $u(G)(x) = F(x) \displaystyle\int_0^1 tG(t)\, dt$.

a) Montrer que u est un endomorphisme de E.
b) Déterminer $\mathrm{Im}(u)$. Montrer que c'est une droite vectorielle.
c) Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $u^2 = ku$ et donner une expression de k au moyen d'une intégrale.
d) Calculer k lorsque $F(x) = \arcsin(x)$.
e) Calculer k lorsque $F(x) = e^{\sqrt{x}}$.

7°) Notons C l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.
Pour tout $f \in C$, pour tout $x > 0$, on pose $u(f)(x) = xf'(x)$.
a) Montrer que u est un endomorphisme de C.
b) Soit $k \in \mathbb{R}$. Déterminer un plan vectoriel E de C tel que la restriction de u à E, que l'on notera v, soit un endomorphisme de E satisfaisant la relation $v^2 = kv$.

Problème 2 : Une équation différentielle d'Euler

Notons (E) l'équation différentielle suivante

$$(E) \ : \ x^2y'' + 5xy' + 9y = f(x),$$

où $f \ : \ \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application continue à valeurs réelles.
On notera (H) l'équation homogène associée.

1°) Montrer que les solutions à valeurs réelles de (E) sont exactement les parties réelles des solutions à valeurs complexes de (E).

2°) Montrer qu'il existe exactement deux fonctions de la forme $x \longmapsto x^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{C}$, qui sont solutions à valeurs complexes de (H).
Pour la suite de ce problème, on notera α l'unique complexe tel que $x \longmapsto x^\alpha$ est solution de (H) et dont la partie imaginaire est positive.
On notera φ l'application $x \longmapsto x^\alpha$.

3°) Soit $y \ : \ \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{C}$ une application deux fois dérivable. On pose $z = \dfrac{y}{\varphi}$.
Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $Z = z'$ est solution de

$$(E') \ : \ Z' + \frac{2\alpha + 5}{x} Z = x^{-\alpha-2} f(x).$$

4°) On suppose que f est identiquement nulle.
résoudre l'équation (E') en l'inconnue $Z \ : \ \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{C}$.

Pour tout $x > 0$ et $z \in \mathbb{C}$, on note $G_z(x) = \displaystyle\int_1^x t^z f(t) dt$.

5°) Appliquer la méthode de variation de la constante pour montrer que l'application $Z_0 \ : \ x \longmapsto x^{-(2\alpha+5)} G_{\alpha+3}(x)$ est une solution particulière de l'équation (E') sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire les solutions Z à valeurs complexes de (E').

6°) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_1^x Z_0(t)dt = \frac{-1}{2\alpha+4}(x^{-(2\alpha+4)} G_{\alpha+3}(x) - G_{-\alpha-1}(x))$.

7°) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) à valeurs complexes.

8°) Montrer que l'application $x \longmapsto x^\alpha \displaystyle\int_1^x Z_0(t)\, dt$ est à valeurs réelles, lorsque $x > 0$.

9°) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) qui sont à valeurs réelles. Faire de même pour (H).