Feuille d'exercices 15.
Séries de réels ou de complexes

Séries de réels positifs

Exercice 15.1 : (niveau 1)
Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice 15.2 : (niveau 1)
Nature de la série $\displaystyle\sum \frac{\mathrm{ch} n}{\mathrm{ch}(2n)}$.

Exercice 15.3 : (niveau 1)
Soit $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ trois séries de réels telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$. Montrer que si $\sum u_n$ et $\sum w_n$ convergent, alors $\sum v_n$ est aussi convergente.

Exercice 15.4 : (niveau 1)
Nature de $\displaystyle\sum u_n$ où $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{n+1} e^{-u_n}$.

Exercice 15.5 : (niveau 1)
Soit (u_n) une suite de réels positifs telle que $\sum u_n$ converge. Déterminer la nature de $\sum \sqrt{u_{2n} u_n}$.

Exercice 15.6 : (niveau 1)
Grâce à une comparaison entre série et intégrale, déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln k$.

En déduire, la nature de la série de terme général $u_n = (\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln k)^{-1}$.

Exercice 15.7 : (niveau 1)
Nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} a_n$ où $a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$.

Exercice 15.8 : (niveau 1)
Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ 3 séries convergentes à termes positifs. Montrer que les séries $\sum \sqrt[3]{u_n v_n w_n}$ et $\sum \sqrt{u_n v_n + u_n w_n + v_n w_n}$ sont convergentes.

Exercice 15.9 : (niveau 1)
Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels de $]0,1[$ telle que $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $p_n = \prod_{i=1}^{n}(1-\varepsilon_i)$.

Montrer que $(p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0) \Longleftrightarrow (\sum \varepsilon_n$ diverge).

Exercice 15.10 : (niveau 2)
Nature de $\sum_{n\geq 1} a_n$ où $a_n = (1+\frac{1}{\sqrt{n}})^{-n}$.

Exercice 15.11 : (niveau 2)
Soit (u_n) une suite de réels positifs. On pose $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$.
Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exercice 15.12 : (niveau 2)
Règle de Cauchy.

1°) Soit $\sum a_n \in \mathcal{S}(\mathbb{C})$ telle que $\sqrt[n]{|a_n|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
- ◇ Si $l < 1$, montrer que $\sum a_n$ est absolument convergente.
- ◇ Si $l > 1$ ou si $l = 1^+$, montrer que $\sum a_n$ diverge grossièrement.
- ◇ Lorsque $l = 1$, montrer qu'on ne peut pas conclure.

2°) En déduire la nature des séries $\sum \left(\frac{n+1}{2n+5}\right)^n$ et $\sum \frac{n^{\ln n}}{\ln^n n}$.

Exercice 15.13 : (niveau 2)
α désigne un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = \frac{(n\alpha)^n}{\sum_{k=0}^{n}(k!)}$. Déterminer la nature de la série $\sum a_n$.

Exercice 15.14 : (niveau 2)
Soit (a_n) une suite décroissante de réels positifs. On suppose que la série $\sum a_n$ converge.
Montrer que $na_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 15.15 : (niveau 2)
Soit (u_n) une suite réelle décroissante qui tend vers 0.
Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum 2^n u_{2^n}$ ont la même nature.
En déduire la nature de $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$, où $\beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 15.16 : (niveau 2)
Nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$, où $u_n = \prod_{k=1}^{n}(2 - e^{\frac{1}{k}})$.

Exercice 15.17 : (niveau 2)
Calculer $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{n^2+a^2}$.

Exercice 15.18 : (niveau 3)
Soit (u_n) une suite décroissante de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $k\in\mathbb{N}$ avec $k\geq 2$ et $n_0\in\mathbb{N}^*$ tels que , pour tout $n\geq n_0, ku_{kn}\geq u_n$. Montrez que $\displaystyle\sum u_n$ est divergente.

Exercice 15.19 : (niveau 3)
Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de complexes telle que $\displaystyle\sum\frac{a_n}{n}$ est absolument convergente.
On suppose que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^k}=0$.
Que peut-on dire de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$?

Exercice 15.20 : (niveau 3)
Règle de Duhamel
Soit $\displaystyle\sum a_n$ une série à termes strictement positifs.

1°) On suppose qu'il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1-\dfrac{\alpha}{n}+o(\dfrac{1}{n})$.
Si $\alpha>1$, montrer que $\sum a_n$ converge et si $\alpha<1$, montrer que $\sum a_n$ diverge.

2°) Déterminer la nature de la série $\sum a_n$, où
$a_n=\dfrac{2\times 4\times\cdots\times(2n-2)\times(2n)}{3\times 5\times\cdots\times(2n-1)\times(2n+1)}$.

Exercice 15.21 : (niveau 3)
Soit $\varphi\ :\ \mathbb{N}^*\longrightarrow\mathbb{N}^*$ une application injective. Montrer que la série $\displaystyle\sum\frac{\varphi(n)}{n^2}$ diverge.

Exercice 15.22 : (niveau 3)
Soit φ une application injective de $\mathbb{N}^*$ dans lui-même.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $a_n=PPCM(\varphi(1),\ldots,\varphi(n))$.
Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum\frac{1}{a_n}$.

Séries alternées

Exercice 15.23 : (niveau 1)
Déterminer les natures des séries $\displaystyle\sum(-1)^n\frac{2^n}{3^{\sqrt{n}}}$ et $\displaystyle\sum(-1)^n\frac{2^{\ln n}}{3^{\sqrt{n}}}$.

Exercice 15.24 : (niveau 1)
Déterminer la nature de la série $\sum(-1)^n a_n$, où $a_n=\displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^{\frac{4}{\pi}}\frac{\sin\frac{1}{t}}{n+t}dt$.

Exercice 15.25 : (niveau 2)
Calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\Big(1+\frac{(-1)^n}{n}\Big)$.

Exercice 15.26 : (niveau 2)
Nature de la série $\sum a_n$, où $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n-\ln n}$.

Exercice 15.27 : (niveau 2)
On considère une suite récurrente telle que $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \cos u_n$.
Etudier la suite (u_n), puis les séries de terme général $(-1)^n u_n$ et $\ln(\cos u_n))$.
Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 15.28 : (niveau 2)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n = h_n - \ln n$.

1°) Trouver un equivalent de $u_{n+1} - u_n$.

2°) Déterminer la nature de la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ puis en deduire la convergence de la suite (u_n). On notera γ la limite de la suite (u_n).

3°) Montrer que $h_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

4°) Montrer qu'il existe α et β tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = \alpha h_{2n} + \beta h_n$.

5°) En deduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2$.

Soit $\sigma \in \mathbb{R}$. On note (w_k) la suite définie par : $w_k = \dfrac{\sigma}{k}$ lorsque 4 divise k et $w_k = \frac{1}{k}$ sinon. De plus, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} w_k$.

6°) Montrer que (S_{4n}) converge si et seulement si $\sigma = -3$.

7°) Etudier la nature et calculer la somme de la série $\sum w_k$.

Exercice 15.29 : (niveau 3)

1°) Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{n+1+k}$.

2°) Déterminer la nature de la série de terme général $v_n = (-1)^n u_n$.

Exercice 15.30 : (niveau 3)
Sommation par paquets.
Soient $\sum x_n \in \mathcal{S}(\mathbb{C})$ et $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante.
On pose $y_0 = \sum_{k=0}^{\varphi(0)} x_k$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = \sum_{k=\varphi(n-1)+1}^{\varphi(n)} x_k$.
Ainsi, y_n constitue un "paquet" de $\varphi(n) - \varphi(n-1)$ termes consécutifs de $\sum x_k$, en convenant que $\varphi(-1) = -1$.

1°) Montrer que si $\sum x_n$ converge, alors $\sum y_n$ converge également.
Montrer que la réciproque est fausse.

2°) Montrer que la réciproque est vraie lorsque $\sum x_k$ est à termes positifs.

3°) Montrer que la réciproque est vraie lorsque (x_n) tend vers 0 et que la suite $(\varphi(n) - \varphi(n-1))$ est majorée.

4°) Montrer que la réciproque est vraie lorsqu'à l'intérieur de chaque paquet (pour $k \in [\varphi(n-1)+1, \varphi(n)]$), tous les x_k sont réels et de même signe.

Exercices supplémentaires

Exercice 15.31 : (niveau 1)

Soit α un réel. Déterminer la nature de la série $\sum a_n$ où $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n+3}\right)^{(n^\alpha)}$.

Exercice 15.32 : (niveau 1)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On note $a_n = \text{ch}^\alpha(n) - \text{sh}^\alpha(n)$. Nature de $\sum a_n$.

Exercice 15.33 : (niveau 1)

Déterminer la nature de la série $\sum \ln(n)\ln(1+\dfrac{(-1)^n}{n})$.

Exercice 15.34 : (niveau 1)

Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^n a_n$, où $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{n+\text{Arctan}t}$.

Exercice 15.35 : (niveau 1)

Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\alpha)}{2^n} = \frac{4-2\cos\alpha}{5-4\cos\alpha}$.

Exercice 15.36 : (niveau 2)
Soit (a_n) une suite de réels positifs. Montrez que si $\sum n^2 a_n^2$ converge, $\sum a_n$ est convergente.

Exercice 15.37 : (niveau 2)
Trouver la nature de la série de terme général $u_n = \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$,
à l'aide des suites $x_n = \pi(2+\sqrt{3})^n$ et $y_n = \pi(2-\sqrt{3})^n$.

Exercice 15.38 : (niveau 2)

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Nature de $\sum a_n$ où $a_n = \dfrac{n^\alpha}{(1+a)(1+a^2)...(1+a^n)}$.

Exercice 15.39 : (niveau 2)

Soit (u_n) une suite de réels positifs. Montrer que les séries $\sum u_n, \sum \dfrac{u_n}{1+u_n}$, $\sum \ln(1+u_n)$ et $\sum \displaystyle\int_0^{u_n} \frac{1}{1+x^e}dx$ sont toutes convergentes ou bien toutes divergentes.

Exercice 15.40 : (niveau 2)

Déterminer la nature de $\sum a_n$ où $a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+n^2\tan^2(x)}$.

Exercice 15.41 : (niveau 2)
Si $n \in \mathbb{N}^*$ on note $p(n)$ le nombre de chiffres de l'écriture décimale de n.
Déterminer la nature de $\sum\limits_{n\geq 1}(10 - n^{\frac{1}{p(n)}})$.

Exercice 15.42 : (niveau 2)
Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs.
On pose $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}(v_n + \sqrt{v_n^2 + u_n})$.
1°) On suppose que $\sum u_n$ est convergente : Nature de $\sum v_{n+1}(v_{n+1} - v_n)$, convergence de $(v_{n+1}(v_{n+1} - v_n))$, de $(v_{n+1} - v_n)$, puis de (v_n).
2°) On suppose que (v_n) converge dans $\mathbb{R}$: Convergence de $\sum(v_{n+1}^2 - v_n^2)$, puis de $\sum u_n$.

Exercice 15.43 : (niveau 2)
Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{\sqrt{n}}$.

Exercice 15.44 : (niveau 2)
Soit f une application de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}_+$ que l'on suppose croissante et continue.
Montrer que l'intégrabilité de $t \longmapsto f(e^{-t})$ sur $\mathbb{R}_+$ est équivalente à la convergence de la série de terme général :

- **1°)** $u_n = f(e^{-n})$.
- **2°)** $v_n = \frac{1}{n} f(\frac{1}{n})$.
- **3°)** $w_n = nf(e^{-n^2})$.

Exercice 15.45 : (niveau 2)

1°) Notons $\begin{array}{rccc} f: & [1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\sin(\ln x)}{x} \end{array}$. Montrer que f' est intégrable.

2°) Pour $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 2$, on pose $w_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n)$.
Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} w_n$ est absolument convergente.

3°) Montrer que la suite $(\cos(\ln n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

4°) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(\ln n)}{n}$.

Exercice 15.46 : (niveau 2)

1°) En utilisant que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2k+1} = \displaystyle\int_0^1 x^{2k}dx$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

2°) Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \ln\left(tan \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right)$ (on pourra faire intervenir les restes de Cauchy R_n de la série de la première question).

Exercice 15.47 : (niveau 3)
(u_n) désigne une suite de réels positifs.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \dfrac{1}{1+n^2u_n}$.

1°) On suppose que $u_n \sim \dfrac{1}{n^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
Discuter de la convergence de la série des w_n en fonction de α.

2°) On suppose que $\sum u_n$ et $\sum w_n$ sont convergentes.
Montrer que $\sum \sqrt{u_n w_n}$ est divergente.

3°) On suppose que $\sum u_n$ converge. Montrer que $\sum w_n$ diverge.

Exercice 15.48 : (niveau 3)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1°) Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ où $a_n = \dfrac{\cos(\frac{n\pi}{3})}{n^\alpha}$.

2°) Soit β un second réel.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(\beta k)$.
Calculer C_n. La suite (C_n) est-elle bornée ?
b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k\beta)}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{n} C_k\left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right) - C_0 + \frac{C_n}{(n+1)^\alpha}.$$
c) Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ où $a_n = \dfrac{\cos(\beta n)}{n^\alpha}$?

Exercice 15.49 : (niveau 3)
a et b sont deux réels strictement positifs.
Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+a}{n+b}$.
Le but de l'exercice est de déterminer la nature de $\sum u_n$ et de calculer sa somme en cas de convergence.

1°) Traitez le cas où $a \geq b$.

2°) On suppose que $a - b + 1 < 0$.
- Etudiez le sens de variation de la suite $((n+b-1)u_n)$.
- Traitez l'exercice dans ce cas.

3°) Achevez la résolution de l'exercice.

Exercice 15.50 : (niveau 3)
Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq 2$. Soit (u_k) une suite p-périodique de complexes.
Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{u_k}{k}$ est convergente si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} u_k = 0$.

Exercice 15.51 : (niveau 3)

Soit f une application de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même telle que $\dfrac{f'(t)}{f(t)} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Montrer que la série $\sum f(n)$ est convergente.

Exercice 15.52 : (niveau 3)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs avec $u_0 > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de $\sum \dfrac{u_n}{s_n^\alpha}$.

Exercice 15.53 : (niveau 3)

Soit (u_n) une suite décroissante de réels qui tend vers 0.

Montrer que $\sum u_n$ et $\sum n(u_n - u_{n+1})$ ont la même nature.

Lorsqu'elles sont définies, comparer les sommes de ces deux séries.

Exercice 15.54 : (niveau 3)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f(n)$ le nombre de "1" dans l'écriture binaire de n.

Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{f(n)}{n(n+1)}$ est convergente et calculer sa somme.