DM 20. Un corrigé

Problème 1 : Endomorphimes u tels que $u^2 = ku$.

On posera $e = Id_E$.

1°) Soit $u \in A_k \cap GL(E)$. Alors $u = u^2u^{-1} = kuu^{-1} = ke$, donc $A_k \cap GL(E) \subset \{ke\}$. Réciproquement, lorsque $k \neq 0$, $(ke)^2 = k.(ke)$ et $(ke).(\frac{1}{k}e) = e = (\frac{1}{k}e)(ke)$, donc $ke \in A_k \cap GL(E)$.
Cependant, lorsque $k = 0$, $ke = 0 \notin GL(E)$, sauf dans le cas particulier où $E = \{0\}$.
En conclusion, lorsque $k \neq 0$ ou $E = \{0\}$, $A_k \cap GL(E) = \{ke\}$ et lorsque $k = 0$ et $E \neq \{0\}$, $A_k \cap GL(E) = \emptyset$.

2.a) Soit $x \in Im(u)$. Il existe $y \in E$ tel que $x = u(y)$.
Ainsi, $u(x) = u^2(y) = ku(y) = kx$, donc $u(x) = kx$.
2.b)
$\diamond$ On suppose que $k \neq 0$.
Soit $x \in Im(u) \cap Ker(u)$. D'après b, $u(x) = kx$, or $u(x) = 0$ et $k \neq 0$, donc $x = 0$.
Ainsi, $Im(u) \cap Ker(u) = \{0\}$.
Soit $x \in E$. $x = (x - \dfrac{1}{k}u(x)) + \dfrac{1}{k}u(x)$, et $u(x - \dfrac{1}{k}u(x)) = 0$, donc $x \in Ker(u) \oplus Im(u)$.
Ainsi, $E = Ker(u) \oplus Im(u)$.
$\diamond$ On suppose que $k = 0$. Alors $u^2 = 0$, donc $Im(u) \subset Ker(u)$.
3.a) Supposons que $uv + vu = 0$. Ainsi, $uv = -vu$, donc
$(uv)u = -vu^2 = -kvu$ et $u(vu) = -u^2v = -kuv$. Ainsi,
$kvu = kuv$, or $k \neq 0$, donc $uv = vu = -vu$. Ainsi $uv = vu = 0$.
3.b)
$\diamond$ $u + v \in A_k \iff (u + v)^2 = k(u + v) \iff u^2 + v^2 + uv + vu = k(u + v)$, donc
$u + v \in A_k \iff uv + vu = 0 \iff uv = vu = 0$.
$\diamond$ On suppose que $uv = vu = 0$.
- Si $x \in Im(u+v)$, il existe $y \in E$ tel que $x = (u+v)(y) = u(y)+v(y) \in Im(u)+Im(v)$, donc $Im(u + v) \subset Im(u) + Im(v)$.

Réciproquement, soit $x \in Im(u) + Im(v)$. Ainsi, il existe $(y, z) \in E^2$ tel que
$x = u(y) + v(z)$. Alors $x = (u + v)(\dfrac{1}{k}(u(y) + v(z))) \in Im(u + v)$,
donc $Im(u + v) = Im(u) + Im(v)$.
- Si $x \in Ker(u) \cap Ker(v)$, $(u + v)(x) = u(x) + v(x) = 0$, donc $x \in Ker(u + v)$.

Réciproquement, si $x \in Ker(u+v)$,
$u(x) = \frac{1}{k}u^2(x) = \frac{1}{k}(u^2+uv)(x) = \frac{1}{k}u((u+v)(x)) = 0$, donc $x \in Ker(u)$, et de même, $x \in Ker(v)$.
Ainsi, $Ker(u+v) = Ker(u) \cap Ker(v)$.
3.c)
◇ $(uv)^2 = uvvu = kuvu = kvu^2 = k^2uv$, donc $uv \in A_{k^2}$.
◇ $Im(uv) = uv(E) = u(v(E)) \subset Im(u)$ et de même, $Im(uv) \subset Im(v)$,
donc $Im(uv) \subset Im(u) \cap Im(v)$.
Soit $x \in Im(u) \cap Im(v)$. Il existe $(y,z) \in E^2$ tel que $x = u(y) = v(z)$.
Alors $uv(z) = u^2(y) = ku(y) = kx$, or $k \neq 0$, donc $x = uv(\frac{1}{k}z) \in Im(uv)$.
Ainsi, $Im(uv) = Im(u) \cap Im(v)$.
◇ Soit $x \in Ker(u) + Ker(v)$. Il existe $(y,z) \in Ker(u) \times Ker(v)$ tel que $x = y+z$.
$uv(x) = vu(y) + uv(z) = 0$, donc $Ker(u) + Ker(v) \subset Ker(uv)$.
Réciproquement, soit $x \in Ker(uv)$. $x = (x - \frac{1}{k}u(x)) + \frac{1}{k}u(x)$. De plus $u(x - \frac{1}{k}u(x)) = 0$, et $v(\frac{1}{k}u(x)) = \frac{1}{k}uv(x) = 0$, donc $x \in Ker(u) + Ker(v)$.
Ainsi, $Ker(u) + Ker(v) = Ker(uv)$.
4.a) Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha f + \beta e = 0$. Si $\alpha \neq 0$, alors $f = -\frac{\beta}{\alpha}e$ ce qui est faux, car f n'est pas une homothétie. Ainsi, $\alpha = 0$, puis $\beta e = 0$, donc $\beta = 0$. Ainsi, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta e = 0 \Longleftrightarrow \alpha = \beta = 0$.
◇ Soit $(\lambda_1, k) \in \mathbb{R}^2$.
$f - \lambda_1 e \in A_k \Longleftrightarrow (f-\lambda_1 e)^2 = k(f - \lambda_1 e) \Longleftrightarrow f^2 - (2\lambda_1 + k)f + (\lambda_1^2 + k\lambda_1)e = 0$.
Or $f^2 - af + be = 0$, donc
$f - \lambda_1 e \in A_k \Longleftrightarrow (2\lambda_1 + k - a)f + (b - \lambda_1^2 - k\lambda_1)e = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + k - a & = 0 \\ b - \lambda_1^2 - k\lambda_1 & = 0 \end{cases}$,
d'après le début de cette question. Donc $f - \lambda_1 e \in A_k \Longleftrightarrow \begin{cases} a & = \lambda_1 + (\lambda_1 + k) \\ b & = \lambda_1(\lambda_1 + k) \end{cases}$
Ainsi, $f - \lambda_1 e \in A_k$ si et seulement si λ_1 et $\lambda_1 + k$ sont les racines, comptées avec multiplicité du polynôme $X^2 - aX + b$.
◇ S'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et $(k, k') \in \mathbb{R}^2$ tels que $f - \lambda_1 e \in A_k$ et $f - \lambda_2 e \in A_{k'}$, alors le polynôme $X^2 - aX + b$ admet deux racines réelles distinctes, λ_1 et λ_2, donc $a^2 - 4b > 0$.
◇ Réciproquement, supposons que $a^2 - 4b > 0$, et notons λ_1 et λ_2 les deux racines réelles distinctes de $X^2 - aX + b$. D'après ce qui précède, $f - \lambda_1 e \in A_{\lambda_2 - \lambda_1}$ et $f - \lambda_2 e \in A_{\lambda_1 - \lambda_2}$.
◇ En conclusion, la condition nécessaire et suffisante demandée est $a^2 - 4b > 0$, et dans ce cas, $k = \lambda_2 - \lambda_1$ et $k' = \lambda_1 - \lambda_2$.
4.b)
◇ $uv = (f - \lambda_1 e)(f - \lambda_2 e) = f^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)f + \lambda_1\lambda_2 e = f^2 - af + be = 0$.
De même, $vu = 0$.
◇ $u - v = (\lambda_2 - \lambda_1)e \in A_{\lambda_2 - \lambda_1}$, $u \in A_k = A_{\lambda_2 - \lambda_1}$ et $-v \in A_{-k'} = A_{\lambda_2 - \lambda_1}$, or $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$, donc d'après 2.b, $uv = vu = 0$.

4.c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. $f = \dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(\lambda_2 u - \lambda_1 v)$, et u et v commutent, donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton. Ainsi,

$f^p = \dfrac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)^p} \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (\lambda_2 u)^k (-\lambda_1 v)^{p-k}$, or $uv = vu = 0$, donc

$f^p = \dfrac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)^p}(\lambda_2^p u^p + (-\lambda_1)^p v^p)$.

$u \in A_{\lambda_2 - \lambda_1}$, donc par récurrence, on montre que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $u^p = (\lambda_2 - \lambda_1)^{p-1} u$.

De même, $v^p = (\lambda_1 - \lambda_2)^{p-1} v$, donc $f^p = \dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(\lambda_2^p u - \lambda_1^p v)$ (formule également valable pour $p = 0$).

4.d)

◇ Supposons que $b = 0$. Alors $f^2 - af = 0$. Si f est inversible,
$f - ae = f^{-1}(f^2 - af) = 0$, ce qui est impossible car f n'est pas une homothétie. Donc f n'est pas inversible.

◇ Supposons que $b \neq 0$.

Dans ce cas, on peut écrire $f^2 - af + be = 0$ sous la forme $f.(\frac{-1}{b})(f - ae) = e$, donc f est inversible et $f^{-1} = \frac{1}{b}(ae - f)$.

On peut aussi donner pour f^{-1} une formule du même type qu'à la question précédente :
On a $\lambda_1 \lambda_2 = b \neq 0$, donc $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 \neq 0$.

Posons $g = \dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(\lambda_2^{-1} u - \lambda_1^{-1} v)$ (inspiré de la formule précédente avec $p = -1$). Alors $fg = \dfrac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}(u^2 + v^2)$, car $f = \dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(\lambda_2 u - \lambda_1 v)$. Ainsi, $fg = \dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(u - v) = e$.

◇ En conclusion, f est inversible si et seulement si $b \neq 0$ et dans ce cas,
$f^{-1} = \dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(\lambda_2^{-1} u - \lambda_1^{-1} v)$.

5°) Par hypothèse, il existe $x_0 \in E$ tel que $x_0 \neq 0$ et $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}(x_0)$.
$g(x_0) \in \mathrm{Im}(g)$, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g(x_0) = \alpha x_0$.
Soit $x \in E$. $g(x) \in \mathrm{Im}(g)$, donc il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = \beta x_0$.
Alors $g^2(x) = \beta g(x_0) = \beta \alpha x_0 = \alpha g(x)$. Ainsi, $g \in A_\alpha$.

6.a) Soit $(G_1, G_2) \in E^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $x \in [0,1]$.

$u(\alpha G_1 + G_2)(x) = \displaystyle\int_0^1 F(x) t (\alpha G_1(t) + G_2(t)) dt = \alpha \int_0^1 F(x) t G_1(t) dt + \int_0^1 F(x) t G_2(t) dt$,

donc $u(\alpha G_1 + G_2)(x) = \alpha u(G_1)(x) + u(G_2)(x)$, ce qui prouve que u est linéaire.

De plus, $u(G) = (x \longmapsto F(x) \displaystyle\int_0^1 tG(t)dt$ est une application continue, donc u est un endomorphisme sur E.

6.b) Pour tout $G \in E$, $u(G) = (\displaystyle\int_0^1 tG(t)dt) \times F \in Vect(F)$, donc $Im(u) \subset Vect(F)$.

De plus, $u(1) = (\displaystyle\int_0^1 tdt) \times F = \frac{1}{2} F$, donc $F = 2 \times (\frac{1}{2} F) \in \mathrm{Im}(u)$, puis $\mathrm{Vect}(F) \subset \mathrm{Im}(u)$.

En conclusion, $Im(u) = Vect(F)$.

6.c) D'après 4.a, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $u \in A_k$, et k et le rapport de l'homothétie correspondant à l'endomorphisme induit par F sur $Vect(F)$.
Or $u(F) = (\displaystyle\int_0^1 tF(t)dt) \times F$, donc $k = \displaystyle\int_0^1 tF(t)dt$.
6.d) $k = \displaystyle\int_0^1 tAsin(t)dt$. L'application $x \longmapsto \sin(x)$ étant de classe C^1 de $[0, \frac{\pi}{2}]$ dans $[0,1]$, on peut poser $t = \sin(x)$. On obtient
$k = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\cos(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2x)dx$, puis par intégration par parties,
$k = [-\dfrac{\cos(2x)}{4}x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2x)}{4}dx = \frac{\pi}{8} + [\frac{\sin(2x)}{8}]_0^{\frac{\pi}{2}}$.
Finalement, $k = \dfrac{\pi}{8}$.
6.e) $k = \displaystyle\int_0^1 te^{\sqrt{t}}dt$. L'application $x \longmapsto x^2$ étant de classe C^1, on peut poser $t = x^2$.
On obtient $k = \int_0^1 x^2e^x 2xdx$.
D'après le cours sur les calculs de primitives,
il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\displaystyle\int 2x^3e^xdx = (ax^3+bx^2+cx+d)e^x + C$.
En dérivant, $2x^3e^x = e^x(3ax^2+2bx+c+ax^3+bx^2+cx+d)$,
donc $2=a$, $b+3a=0$, $c+2b=0$ et $c+d=0$.
Ainsi, $k = [(2x^3-6x^2+12x-12)e^x]_0^1$, puis $k = 4(3-e)$.
7.a) Les théorèmes usuels prouvent que si $f \in C$, alors $u(f) \in C$.
De plus, on vérifie que pour tout $(f,g) \in C^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$u(\alpha f+g)(x) = \alpha u(f)(x) + u(g)(x)$, ce qui prouve que u est un endomorphisme sur C.
7.b) Soit $f \in C$.

$$\begin{aligned}
u^2(f) = ku(f) &\iff \forall x \in \mathbb{R}_+^* \ , \ x\frac{d}{dx}(xf'(x)) = kxf'(x)\\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}_+^* \ , \ x^2f''(x) + (1-k)xf'(x) = 0\\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}_+^* \ , \ f''(x) = \frac{(k-1)}{x}f'(x)\\
&\iff \exists C \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \ , \ f'(x) = Ce^{(k-1)\ln(x)}\\
&\iff \exists C \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \ , \ f'(x) = Cx^{(k-1)}.
\end{aligned}$$

Premier cas : Supposons que $k=0$. Alors
$u^2(f) = ku(f) \iff \exists (C,D) \in \mathbb{R}^2 \ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \ f(x) = C\ln(x) + D$.
On note ln l'application $x \longmapsto \ln(x)$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathbf{1}$ l'application constante égale à 1. Ainsi, $u^2(f) = ku(f) \iff f \in Vect(\ln, \mathbf{1})$.
De plus $Vect(\ln, \mathbf{1})$ est stable par u, donc $E = Vect(\ln, \mathbf{1})$ est un sous-espace vectoriel de C tel que la restriction de u à E est un endomorphisme v vérifiant $v^2 = kv$. De plus E est un plan vectoriel car ln n'est pas une application constante.
Second cas : Supposons que $k \neq 0$. Alors
$u^2(f) = ku(f) \iff \exists (C,D) \in \mathbb{R}^2 \ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \ f(x) = \dfrac{C}{k}x^k + D$.

On note X^k l'application $x \longmapsto x^k$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ et toujours $\mathbf{1}$ l'application constante égale à 1. Ainsi, $u^2(f) = ku(f) \iff f \in Vect(X^k, \mathbf{1})$.
Donc dans ce cas, $E = Vect(X^k, \mathbf{1})$ est un plan vectoriel qui convient.

Problème 2 : Une équation différentielle d'Euler

1°) Soit $y : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution de (E) à valeurs réelles. Alors $y = \mathrm{Re}(y)$, or y est aussi une solution de (E) à valeurs complexes, donc y est la partie réelle d'une solution de (E) à valeurs complexes.
Réciproquement, supposons que $y : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est la partie réelle d'une solution z de (E) à valeurs complexes. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $z(x) = y(x) + iv(x)$ avec $v(x) \in \mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $(1) \ : \ f(x) = x^2 z''(x) + 5xz'(x) + 9z(x)$, or d'après le cours, $z'(x) = y'(x) + iv'(x)$ et $z''(x) = y''(x) + iv''(x)$, donc en prenant la partie réelle de l'égalité (1), sachant que $\mathrm{Re}(f(x)) = f(x)$, on obtient que y est une solution de (E) à valeurs réelles.

2°) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. L'application $x \longmapsto x^\alpha$ est solution de (H) si et seulement si
$(C) \ : \ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ 0 = 9x^\alpha + 5x(\alpha x^{\alpha-1}) + x^2(\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2})$.
$(C) \iff \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ 0 = x^\alpha(9+5\alpha+\alpha(\alpha-1))$, or $x^\alpha \neq 0$, donc $(C) \iff 0 = \alpha^2 + 4\alpha + 9$.
Le discriminant de cette équation de degré 2 est $\Delta = 16 - 36 = -20 = (2i\sqrt{5})^2$, donc $(C) \iff \alpha = -2 \pm i\sqrt{5}$.
Pour la suite, on pose donc $\alpha = -2 + i\sqrt{5}$.

3°) Avec les notations de l'énoncé,

$$\begin{aligned}(E) \quad &\iff \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ f(x) = 9z\varphi + 5x(z'\varphi + z\varphi') + x^2(z''\varphi + 2z'\varphi' + z\varphi'') \\ &\iff f(x) = z(9\varphi + 5x\varphi' + x^2\varphi'') + 5xz'\varphi + x^2 z''\varphi + 2x^2 z'\varphi'\end{aligned}$$

mais φ est solution de (H), donc $9\varphi + 5x\varphi' + x^2\varphi'' = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}(E) \quad &\iff \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ f(x) = 5xz'x^\alpha + x^2 z'' x^\alpha + 2x^2 z'\alpha x^{\alpha-1} \\ &\iff f(x)x^{-\alpha-2} = \frac{5z'}{x} + z'' + 2\frac{z'\alpha}{x} \\ &\iff Z' + \frac{2\alpha+5}{x}Z = x^{-\alpha-2}f(x).\end{aligned}$$

4°) Dans cette question, on résout donc l'équation homogène associée à (E'), que nous noterons (H'). $(H') \iff Z' = -\dfrac{2\alpha+5}{x}Z$,
donc d'après le cours, $(H') \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}, \ Z = \lambda e^{-(2\alpha+5)\ln x} = \lambda x^{-2\alpha-5}$.

5°) Posons $Z = \lambda(x)e^{-2\alpha-5}$. Pour une telle application Z, d'après le cours,
$(E') \iff \lambda'(x)x^{-2\alpha-5} = x^{-\alpha-2}f(x) \iff \lambda'(x) = x^{\alpha+3}f(x)$, donc
$(E') \iff \exists C \in \mathbb{C}, \ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \lambda(x) = C + \displaystyle\int_1^x t^{\alpha+3}f(t)\,dt$. Ainsi,
$(E') \iff \exists C \in \mathbb{C}, \ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ Z = Cx^{-2\alpha-5} + Z_0(x)$.
En particulier, ceci démontre que Z_0 est bien une solution particulière de (E').

6°) Soit $x > 0$. En intégrant par parties,

$\displaystyle\int_1^x Z_0(t)dt = \int_1^x t^{-2\alpha-5}G_{\alpha+3}(t)\,dt = \frac{x^{-(2\alpha+4)}}{-(2\alpha+4)}G_{\alpha+3}(x)+\frac{1}{2\alpha+4}\int_1^x t^{-2\alpha-4}t^{\alpha+3}f(t)\,dt$,
donc $\displaystyle\int_1^x Z_0(t)dt = \frac{-1}{2\alpha+4}(x^{-(2\alpha+4)}G_{\alpha+3}(x) - G_{-\alpha-1}(x))$.

7°) D'après la question 5,

$$\begin{aligned}(E') &\iff \exists C\in\mathbb{C},\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \ z' = Cx^{-2\alpha-5} + Z_0(x)\\ &\iff \exists C,D\in\mathbb{C},\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \ z = D + Cx^{-2\alpha-4} + \int_1^x Z_0(t)\,dt\\ &\iff \exists C,D\in\mathbb{C},\ \ y = Dx^\alpha + Cx^{-\alpha-4} - \frac{1}{2\alpha+4}(x^{-(\alpha+4)}G_{\alpha+3}(x) - x^\alpha G_{-\alpha-1}(x)).\end{aligned}$$

8°) Notons y_1 l'application $x \longmapsto x^\alpha \displaystyle\int_1^x Z_0(t)\,dt$. D'après la question précédente, c'est une solution particulière de (E), donc d'après la première question, $\mathrm{Re}(y_1)$ est une solution de (E) à valeurs réelles. De plus $y_1(1) = 0 = \mathrm{Re}(y_1)(1)$ et
$y_1'(x) = \alpha x^{\alpha-1}\displaystyle\int_1^x Z_0(t)\,dt + x^\alpha Z_0(x)$, donc $y_1'(1) = 0 = \mathrm{Re}(y_1)'(1)$. Ainsi, y_1 et $\mathrm{Re}(y_1)$ sont deux solutions du même problème de Cauchy associé à (E) et aux conditions initiales $y(1) = y'(1) = 0$. Or $(E) \iff y'' = -\frac{5}{x}y' - \frac{9}{x^2}y + \frac{1}{x^2}f(x)$ et les applications $x \longmapsto -\frac{5}{x}$, $x \longmapsto -\frac{9}{x^2}$ et $x \longmapsto \frac{1}{x^2}f(x)$ sont continues, donc on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz. Ainsi, $y_1 = \mathrm{Re}(y_1)$ ce qui prouve que y_1 est bien une application à valeurs réelles sur $\mathbb{R}_+^*$.

9°) D'après la question 1, y est une solution de (E) à valeurs réelles si et seulement si elle est de la forme $x \longmapsto \mathrm{Re}(Dx^\alpha) + \mathrm{Re}(Cx^{-\alpha-4}) + x^\alpha\displaystyle\int_1^x Z_0(t)\,dt$ (en utilisant la question précédente), où $C, D\in\mathbb{C}$.
Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. $x^{-\alpha-4} = x^{-2-i\sqrt5} = e^{-(2+i\sqrt5)\ln x} = e^{\ln(\frac{1}{x^2})}e^{-i\sqrt5\ln x}$,
donc $x^{-\alpha-4} = \frac{1}{x^2}(\cos(\sqrt5\ln x) - i\sin(\sqrt5\ln x))$
et $x^\alpha = x^{-2+i\sqrt5} = e^{(-2+i\sqrt5)\ln x} = \frac{1}{x^2}(\cos(\sqrt5\ln x) + i\sin(\sqrt5\ln x))$.
On en déduit que y est une solution de (E) à valeurs réelles si et seulement si elle est de la forme $x \longmapsto \frac{1}{x^2}(C'\cos(\sqrt5\ln x) + D'\sin(\sqrt5\ln x)) + x^\alpha\displaystyle\int_1^x Z_0(t)\,dt$ où $C', D'\in\mathbb{R}$.
(H) est un cas particulier de (E) en prenant $f = 0$, auquel cas $Z_0 = 0$, donc la forme générale des solutions de (H) est $x \longmapsto \frac{1}{x^2}(C'\cos(\sqrt5\ln x) + D'\sin(\sqrt5\ln x))$ où $C', D'\in\mathbb{R}$.