La formule de Stirling

Propriété. $\boxed{\textbf{Formule de Stirling}.\ n! \sim \sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n.}$

Démonstration.

• Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \dfrac{\alpha}{n} + O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$.
Montrons qu'alors il existe $C > 0$ tel que $u_n \sim Cn^\alpha$ (il s'agit d'une variante de la régle de Duhamel que l'on verra au TD 15).
Posons $a_n = \dfrac{u_n}{n^\alpha}$. On calcule que $\dfrac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = (1+\dfrac{1}{n})^{-\alpha} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$,
donc $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \Big(1 + \dfrac{\alpha}{n} + O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)\Big)\Big(1 - \dfrac{\alpha}{n} + O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)\Big) = 1 + O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$.
Alors $\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n) = O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$. On en déduit que la série télescopique $\sum(\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n))$ est convergente, donc d'après le cours, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\ln(a_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} c$. Or l'application exponentielle est continue, donc $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^c = C > 0$.

• Posons maintenant $u_n = \dfrac{n!}{n^n e^{-n}}$. On calcule que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1)\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}e$, donc
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = e(1+\dfrac{1}{n})^{-n} = e^{1-n\ln(1+\frac{1}{n})}$, or au voisinage de 0, $\ln(1+t) = t - \dfrac{t^2}{2} + O(t^3)$, donc
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = e^{1-n(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O(\frac{1}{n^3}))} = e^{\frac{1}{2n}+O(\frac{1}{n^2})} = 1 + \dfrac{1}{2n} + O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$.
Ainsi, d'après le point précédent, il existe $C > 0$ tel que $u_n \sim C\sqrt{n}$. Ceci montre que $n! \sim C\sqrt{n}n^n e^{-n}$. Il reste à montrer que $C = \sqrt{2\pi}$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$. Les intégrales I_n s'appellent les intégrales de Wallis et leur étude est à connaître. On peut les rencontrer sous d'autres formes. En effet, en posant $x = \dfrac{\pi}{2} - t$, on obtient $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$.
De plus $I_{2n+1} = -\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{d(cost)}{dt}(1-\cos^2 t)^n dt$, donc en posant $u = \cos t$ (acceptable car $t \longmapsto \cos t$ est de classe C^1), $I_{2n+1} = \displaystyle\int_0^1 (1-u^2)^n du$.

◇ Soit $n \in \mathbb{N}$. Intégrons par parties.

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)(\sin(t))^{n+1}dt = [-\cos(t)\sin^{n+1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^n(t)dt$$
$$= (n+1)(I_n - I_{n+2}),$$
$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N} \ \ I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

◇ Si $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{2n} = \dfrac{2n-1}{2n} I_{2n-2}$, donc on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{2n} = I_0 \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} = \frac{\pi}{2} \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)^2} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}.$$

◇ Si $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{2n+1} = \dfrac{2n}{2n+1} I_{2n-1}$, donc on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{2n+1} = I_1 \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} = \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k)^2}{\prod_{k=1}^{n}(2k)(2k+1)} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$.

◇ D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t)dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt = I_n$, car pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin^{n+1}(t) \leq \sin^n(t)$. Ainsi la suite des intégrales de Wallis est décroissante.
On en déduit que $\dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{I_{n+2}}{I_n} \leq \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
En particulier, $\dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, or $\dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \dfrac{2^{4n}(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}\dfrac{2}{\pi}$, donc
$1 \sim \dfrac{2^{4n}(n!)^4}{(2n)!(2n)!(2n)}\dfrac{2}{\pi} = \dfrac{n!^4}{(2n)!^2} \times \dfrac{2^{4n+1}}{2n\pi}$. Mais

$$n!^4 \sim (C\sqrt{n}n^n e^{-n})^4 = C^4 n^2 n^{4n} e^{-4n} = C^4 n^{2+4n} e^{-4n}$$

et

$$(2n)!^2 \sim (C\sqrt{2n}(2n)^{2n}e^{-2n})^2 = C^2(2n)(2^{4n})n^{4n}e^{-4n} = C^2 n^{1+4n} e^{-4n} 2^{4n+1},$$

donc $1 \sim \dfrac{C^2}{2\pi}$, ce qui prouve que $C = \sqrt{2\pi}$. □