Résumé de cours :
Semaine 19, du 5 février au 9 février.

Séries de vecteurs (fin)

Notation. $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Séries alternées

1.1 Théorème spécial des séries alternées

Définition. On appelle série alternée toute série réelle de la forme $\sum(-1)^n\alpha_n$ ou $\sum(-1)^{n+1}\alpha_n$, où pour tout $n \in \mathbb{R}$, $\alpha_n \in \mathbb{R}_+$.

Théorème des séries spéciales alternées (TSSA).
Soit $\sum a_n$ une série alternée telle que la suite $(|a_n|)$ est décroissante et tend vers 0. On dit dans ce cas que $\sum a_n$ est une série spéciale alternée. Alors $\sum a_n$ est convergente.

De plus pour tout $(n, N) \in \mathbb{N}^2$ avec $N \geq n$, la quantité $\sum_{k=n}^{N} a_k$ est du signe de son premier terme (qui est a_n) et a un module inférieur ou égal au module de son premier terme. C'est encore vrai lorsque $N = +\infty$, donc pour tout $n \in \{-1\} \cup \mathbb{N}$, le reste de Cauchy $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ est du signe de son premier terme (qui est a_{n+1}) et, pour tout $n \in \{-1\} \cup \mathbb{N}$, $|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k| \leq |a_{n+1}|$.

Il faut savoir le démontrer.

1.2 Non commutativité des séries semi-convergentes.

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$.
Il faut savoir le démontrer.

On peut démontrer (hors programme) que, si $\sum a_n$ est une série semi-convergente de réels, pour tout $\ell \in \mathbb{R}$, il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $\sum a_{\sigma(n)}$ converge et a pour somme ℓ.

Dans un chapitre ultérieur, on montrera que, lorsque $\sum a_n$ est une série absolument convergente, pour toute bijection σ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, $\sum a_{\sigma(n)}$ est aussi absolument convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

2 La transformation d'Abel (hors programme)

Transformation d'Abel : Si $(a_n), (x_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, en posant $X_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$,
pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq q$, $\sum_{n=p}^{q} a_n x_n = a_q X_q - a_p X_{p-1} - \sum_{n=p}^{q-1} (a_{n+1} - a_n) X_n$.
Il faut savoir le démontrer.

Remarque. Cette formule ressemble à l'intégration par parties.

Propriété. ***Hors programme : théorème d'Abel.*** Soient (a_n) une suite décroissante de réels qui tend vers 0 et $\sum x_n$ une série de vecteurs dont les sommes partielles sont bornées.
Alors la série $\sum a_n x_n$ converge.

Exemple. Nature de la série $\sum \frac{e^{i\beta n}}{n^\alpha}$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Topologie dans un espace métrique

Pour tout ce chapitre, on fixe un espace métrique (E, d) non vide.

3 Ouverts et fermés

Définition. Soient $x \in E$ et V une partie de E.
V est un voisinage de x si et seulement s'il existe $r > 0$ tel que $B_o(x, r) \subset V$.
$\mathcal{V}(x)$ désignera l'ensemble des voisinages de x.

Remarque. Si E est un espace vectoriel normé, lorsqu'on remplace la norme sur E par une norme équivalente, pour tout $x \in E$, $\mathcal{V}(x)$ n'est pas modifié.

Propriété. La notion de voisinage satisfait les propriétés suivantes :
- ◇ Pour tout $x \in E$, $E \in \mathcal{V}(x)$.
- ◇ Pour tout $x \in E$ et tout $V \in \mathcal{V}(x)$, si $W \supset V$, alors $W \in \mathcal{V}(x)$.
- ◇ Si $x \in E$ et si $(V, W) \in \mathcal{V}(x)^2$, alors $V \cap W \in \mathcal{V}(x)$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Si $x \in E$, une intersection finie de voisinages de x est un voisinage de x.

Définition. Soit $U \subset E$. U est ouvert si et seulement si U est voisinage de tous ses points.

Propriété. La notion d'ouvert satisfait les propriétés suivantes :
- ◇ $\emptyset$ et E sont des ouverts de E.
- ◇ Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.
- ◇ Si I est un ensemble quelconque (éventuellement de cardinal infini) et si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts de E, alors $\bigcup_{i \in I} U_i$ est un ouvert de E.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Les ouverts sont exactement les réunions de boules ouvertes.
Il faut savoir le démontrer.

Définition. Une partie de E est un fermé de E si et seulement si son complémentaire est un ouvert.

Propriété. La notion de fermé satisfait les propriétés suivantes :
- ⋄ $\emptyset$ et E sont des fermés de E.
- ⋄ Une réunion finie de fermés est un fermé.
- ⋄ Si I est un ensemble quelconque (éventuellement de cardinal infini) et si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de fermés de E, alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un fermé de E.

Propriété. Les boules fermées (donc en particulier les singletons) sont des fermés.
Il faut savoir le démontrer.

Corollaire. Toute partie de E de cardinal fini est un fermé de E.

4 Adhérence et intérieur

Définition. Soient $a \in E$ et A une partie de E. On dit que a est un point intérieur de A si et seulement si $A \in \mathcal{V}(a)$. On note $\overset{\circ}{A}$ l'ensemble des points intérieurs de A.

Ainsi, pour tout $a \in E$, $a \in \overset{\circ}{A} \iff A \in \mathcal{V}(a)$.

Propriété. Soit A une partie de E.
$\overset{\circ}{A}$ est la réunion des ouverts contenus dans A. C'est le plus grand ouvert inclus dans A.

Propriété. Soient A et B deux parties de E.
- ⋄ $\overset{\circ}{A} \subset A$,
- ⋄ $\overset{\circ}{A} = A$ si et seulement si A est un ouvert,
- ⋄ $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$,
- ⋄ $A \subset B \Longrightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ et
- ⋄ $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

Il faut savoir le démontrer.

Définition. Soient $a \in E$ et A une partie de E. On dit que a est un point adhérent de A si et seulement si, pour tout $V \in \mathcal{V}(a)$, $V \cap A \neq \emptyset$.
On note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents de A. $\overline{A}$ est appelée l'adhérence de A.
Ainsi, pour tout $a \in E$, $a \in \overline{A} \iff [\forall V \in \mathcal{V}(a)\ \ V \cap A \neq \emptyset]$.

Propriété. Soit A une partie de E. $E \setminus \overline{A} = \overset{\circ}{\overbrace{E \setminus A}}$ et $E \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{E \setminus A}$.

Il faut savoir le démontrer.

Corollaire. Soit A une partie de E.
$\overline{A}$ est l'intersection des fermés contenant A. C'est le plus petit fermé contenant A.

Propriété. Soient A et B deux parties de E.

$$\begin{array}{rll} \diamond & \overline{A} & \supset A, \\ \diamond & \overline{A} & = A \text{ si et seulement si } A \text{ est un fermé}, \\ \diamond & \overline{\overline{A}} & = \overline{A}, \\ \diamond & A \subset B & \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B} \text{ et} \\ \diamond & \overline{A \cup B} & = \overline{A} \cup \overline{B}. \end{array}$$

Il faut savoir le démontrer.

Propriété (hors programme) : Soit (x_n) une suite de points de E.
Pour tout $N \in \mathbb{N}$, notons $X_N = \{x_n / n \geq N\}$.
Alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de (x_n) est $\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{X_N}$: il est fermé.

Il faut savoir le démontrer.

Définition. Soit A une partie de E. Soit $x \in A$.
On dit que x est isolé dans A si et seulement si il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tel que $V \cap A = \{x\}$, c'est-à-dire si et seulement si $x \notin \overline{A \setminus \{x\}}$.

Définition. Soit A une partie de E. Soit $x \in E$.
On dit que x est un point d'accumulation de A si et seulement si, pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, $(V \cap A) \setminus \{x\} \neq \emptyset$, c'est-à-dire si et seulement si $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

Propriété. Les points adhérents de A sont les points de E situés à une distance nulle de A.
Il faut savoir le démontrer.

Définition. Une partie de E est dense dans E si et seulement si elle rencontre toutes les boules ouvertes de E.

Propriété. Une partie A de E est dense dans E si et seulement si $\overline{A} = E$.

Définition. Soit $A \subset E$. La frontière de A est $Fr(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A} = \overline{A} \cap (E \setminus \mathring{A})$.

Propriété. Soit A une partie de E. $[A \setminus Fr(A)] = \mathring{A} \subset A \subset \overline{A} = [A \cup Fr(A)]$.

Propriété. A ouvert $\iff A \cap Fr(A) = \emptyset$. A fermée $\iff Fr(A) \subset A$.

5 Caractérisation par les suites

Propriété. $a \in \overline{A}$ si et seulement s'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a.
Il faut savoir le démontrer.

Corollaire. A est dense dans E si et seulement si pour tout $l \in E$, il existe $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$.

Propriété. A est fermé si et seulement si toute suite convergente d'éléments de A a pour limite un élément de A.

Propriété. Soit G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie ou infinie.
Tout sous-espace vectoriel de G de dimension finie est fermé.

6 Topologie induite sur une partie

Propriété. Les boules, ouverts, fermés et voisinages pour la topologie induite sur A sont respectivement les traces sur A des boules centrées dans A, des ouverts, des fermés et des voisinages pour la topologie de E.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Si B est une partie de A, l'adhérence de B pour la topologie induite sur A est la trace sur A de l'adhérence de B pour la topologie globale sur E.

Propriété. Soit B une partie de A. B est dense dans A si et seulement si $A \subset \overline{B}$.

7 Les compacts

Définition. Une partie A de E est compacte si et seulement si toute suite d'éléments de A admet au moins une valeur d'adhérence dans A.

Propriété. Tout compact de E est fermé et borné.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit A un compact de E et $B \subset A$: B est compact si et seulement s'il est fermé.

Théorème. Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, les parties compactes sont exactement les parties fermées et bornées.

Théorème. Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.
Il faut savoir le démontrer.

Corollaire. Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $E_1, \ldots, E_p$ p $\mathbb{K}$-espaces vectoriels norméset $A_1, \ldots, A_p$ p compacts respectivement dans $E_1, \ldots, E_p$. Alors $A_1 \times \cdots \times A_p$ est un compact de $E_1 \times \cdots \times E_p$.
Il faut savoir le démontrer.

Théorème (hors programme) : Caractérisation de la compacité par la propriété de Borel Lebesgue. Soit A une partie de E. Les assertions suivantes sont équivalentes.
i) A est compact.
ii) Pour tout ensemble I et pour toute famille d'ouverts $(U_i)_{i \in I}$ telle que $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, il existe une partie J finie de I telle que $A \subset \bigcup_{i \in J} U_i$: de tout recouvrement de A par des ouverts, on peut en extraire un recouvrement fini.
iii) Pour tout ensemble I et pour toute famille de fermés $(F_i)_{i \in I}$ telle que $A \cap \bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, il existe une partie J finie de I telle que $A \cap \bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset$.

Propriété. Si $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$, alors l'ensemble $\{x_n / n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est un compact de E.
Il faut savoir le démontrer.