MPSI 2

Programme des colles de mathématiques.

Semaine 17 : du lundi 26 février au vendredi 1er mars.

Liste des questions de cours

1°) Si une série converge, montrer que son terme général tend vers 0. La réciproque est-elle vraie ?

2°) Nature de $\sum a^n$ où $a \in \mathbb{C}$ et valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ en cas de convergence. Justifier.

3°) Montrer que l'absolue convergence implique la convergence dans un Banach.

4°) Présenter la technique de comparaison entre séries et intégrales. En déduire le théorème du même nom.

5°) Etablir la nature des séries de Riemann.

6°) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \left(\cos \frac{1}{n} \right)^{(n^\alpha)}$.

7°) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

8°) Déterminer la nature des séries de Bertrand.

9°) Enoncer et démontrer le critère de D'Alembert.

Thème de la semaine

Suites de vecteurs

Cf le précédent programme de colles.

Séries de vecteurs (sauf séries alternées)

Les élèves doivent savoir faire des calculs asymptotiques simples. Cependant, le cours sur les o, O, équivalents et développements limités n'a pas encore été étudié. Aucune aisance technique n'est donc attendue.

Notation. $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
E est un espace de Banach, c'est-à-dire un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé complet.

1 Définitions

Définition de la série formelle $\sum a_n$. Sommes partielles d'une série.
L'ensemble $\mathcal{S}(E)$ des séries de vecteurs de E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Si (A_n) est une suite de vecteurs, la série télescopique $\sum(A_n - A_{n-1})$ est l'unique série dont la suite des sommes partielles est (A_n).

Série tronquée $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} a_n$.

2 Convergence d'une série de vecteurs

$\sum a_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} a_n$ sont de même nature.

La série télescopique $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge si et seulement si la suite (u_n) converge.

Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent, $\sum(a_n + \lambda b_n)$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + \lambda b_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Si une série converge, son terme général tend vers 0. La réciproque est fausse.
Lorsque a_n ne tend pas vers 0, on dit que $\sum a_n$ diverge grossièrement.

Définition. Si $\sum a_n$ converge, son n-ième reste de Cauchy est $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$. On a $R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Une série à valeurs dans un produit de p espaces vectoriels normés converge si et seulement si ses séries composantes sont convergentes.
Une série à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie converge si et seulement si ses séries coordonnées sont convergentes.
Une série $\sum a_n$ de complexes converge si et seulement si $\sum \mathrm{Re}(a_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(a_n)$ convergent,
et dans ce cas $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(a_n) + i\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(a_n)$.

3 Convergence absolue

Critère de Cauchy, séries absolument convergente.
L'absolue convergence implique la convergence (car E est de Banach).
Séries semi-convergentes.

4 Séries de réels positifs

4.1 Théorèmes généraux

$\sum a_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Si $\forall n \in \mathbb{N}\ 0 \leq a_n \leq b_n$ et $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.
Si $\sum a_n, \sum b_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$ avec $a_n = O(b_n)$ et si $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ converge.

Théorème. Soit $\sum a_n, \sum b_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ avec b_n de signe constant à partir d'un certain rang.
Si $a_n \sim b_n$, alors $\sum a_n$ et $\sum b_n$ ont la même nature.

Les espaces vectoriels normés $l^1(\mathbb{K}) = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} / \sum |u_n| \text{converge }\}$
et $l^2(\mathbb{K}) = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} / \sum |u_n|^2 \text{converge }\}$.

Méthode par défaut pour étudier la nature d'une série $\sum a_n$: rechercher un équivalent de a_n.

4.2 Séries de Riemann

Technique de **comparaison entre séries et intégrales** (TCSI).
Théorème de comparaison entre séries et intégrales : lorsque f est continue positive et décroissante, la série $\sum_{n\geq n_0} f(n)$ a même nature que la suite $\left(\int_{n_0}^{n} f(t)dt\right)_{n\geq n_0}$.

La **série de Riemann** $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
Critère de Riemann (étude de $n^\alpha a_n$).

Constante d'Euler : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Séries de Bertrand (hors programme : à savoir établir lorsque c'est nécessaire dans un exercice).

Critère de D'Alembert.

Formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n$ (démontrée en DM).

Prévisions pour la semaine prochaine :

Séries alternées.