

DM 22 : énoncé

**Il s'agit d'un sujet supplémentaire pour votre travail personnel.
Il n'est pas à rendre.
Un corrigé sera fourni lundi 19 février.**

\mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

On fixe $n_0 \in \mathbb{N}$.

Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite d'éléments de \mathbb{K} , on note, $\forall n \geq n_0$, $P_n = \prod_{k=n_0}^n u_k$.

Si la suite $(P_n)_{n \geq n_0}$ converge, on notera $\prod_{k=n_0}^{+\infty} u_k$ sa limite et on dira que le produit

$\prod_{k=n_0}^{+\infty} u_k$ existe.

Première partie :

Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1) On suppose que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$. Montrer que le produit $\prod_{k=0}^{+\infty} u_k$ existe.

2) Calculer $\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$, $\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ et $\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right)$.

3) a) Vérifier que, $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $\frac{\text{th}t}{\text{th}\frac{t}{2}} = 1 + \frac{1}{\text{cht}}$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$ avec $x > 1$. On note $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$v_1 = x \text{ et, } \forall n \geq 1, v_{n+1} = 2v_n^2 - 1.$$

Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $v_1 = \text{ch}\theta$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \text{ch}(2^{n-1}\theta)$

Montrer l'existence et donner la valeur de $\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{v_n}\right)$, d'abord en fonction de θ , puis en fonction de x .

4) On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| < 1$ et que la série $\sum u_n$ converge.

a) Dans cette question, on suppose que $\sum u_n^2$ converge.

Montrer que la série $\sum (\ln(1 + u_n) - u_n)$ converge.

En déduire que $\ln \left(\prod_{n=0}^N (1 + u_n) \right)$ converge lorsque N tend vers $+\infty$.

Montrer que $\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + u_n)$ existe et qu'il appartient à \mathbb{R}_+^* .

b) Dans cette question, on suppose que $\sum u_n^2$ diverge.

Montrer que $\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + u_n)$ existe et qu'il vaut 0.

c) Calculer $\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \right)$ et $\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right)$.

Seconde partie :

1) a) Montrer que, pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin t \geq \frac{2t}{\pi}$.

b) Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n} dt \geq \frac{\pi}{2(2n+1)}$.

c) En déduire que, pour tout $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, le quotient $\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha} (\sin t)^{2n} dt}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n} dt}$ tend vers 0.

Soit $\varphi : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue telle que $\varphi(\frac{\pi}{2}) \neq 0$.

d) On admettra que la continuité de φ en $\frac{\pi}{2}$ est équivalente à la phrase suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[, \forall x \in \left[\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} \right], \left| \varphi(x) - \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| \leq \varepsilon.$$

Montrer que, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t) (\sin t)^{2n} dt \sim \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n} dt.$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n} dt$.

a) Pour $n \geq 1$, montrer que $I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}$.

b) Calculer I_n en fonction de n puis montrer que lorsque l'entier n tend vers $+\infty$,

$$I_n \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

3 a) Calculer la limite de la suite $\left(\int_0^{p\pi} e^{-2t} dt \right)_{p \in \mathbb{N}}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $\left(\int_0^{p\pi} e^{-2t} (\sin t)^{2n} dt \right)_{p \in \mathbb{N}}$ est convergente. On notera u_n la limite de cette suite.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-2t} (\sin t)^{2n} dt = e^{-2k\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t) (\sin t)^{2n} dt$, où φ est une application indépendante de n que l'on précisera.

d) En déduire que lorsque l'entier n tend vers $+\infty$,

$$u_n \sim \frac{1}{2 \operatorname{sh} \pi} \sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

4 a) Pour tout $n \geq 1$, montrer que $u_n = n \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^{p\pi} e^{-2t} (\cos t) (\sin t)^{2n-1} dt$.

b) En déduire que pour tout $n \geq 1$, $n(2n-1)u_{n-1} = 2(1+n^2)u_n$.

c) Montrer que $u_n = \frac{(n!)^2 I_n}{\pi \prod_{k=1}^n (1+k^2)}$.

d) En déduire que $\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$ existe et que

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) = \frac{\operatorname{sh} \pi}{\pi}.$$

Troisième partie :

Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1) Montrer que $\prod_{n=1}^{+\infty} \left| 1 + \frac{i}{n} \right|$ existe et donner sa valeur.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n nombres complexes z_1, \dots, z_n .

Montrer par récurrence que $\left| -1 + \prod_{k=1}^n (1 + z_k) \right| \leq -1 + \prod_{k=1}^n (1 + |z_k|)$: on commencera par l'établir pour $n = 1$ et $n = 2$.

3) Lorsque $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de complexes, on dit que c'est une suite de Cauchy si et seulement si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall q \in \mathbb{N} |z_{n+q} - z_n| \leq \varepsilon.$$

On admettra qu'une suite de complexes est convergente si et seulement si c'est une suite de Cauchy.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| < 1$, et telle que la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

Montrer que $\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + u_n)$ existe.

4) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = 1$ et $u_n \neq -1$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^{i\theta_n}$, avec $\theta_n \in]-\pi, \pi[$.

Montrer que $\prod_{n=0}^{+\infty} u_n$ existe si et seulement si la série $\sum \theta_n$ converge.

5) Le produit $\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{i}{n} \right)$ existe-t-il ?