DM 23

À préparer pour le dimanche 25 février.

Répartition des nombres premiers

On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{P}_n = \{p \in \mathbb{P} \ / \ 0 \leq p \leq n\}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\pi(n)$ le cardinal de $\mathbb{P}_n$.

Partie I : $\pi(n) = O\Big(\dfrac{n}{\ln n}\Big)$**.**

1°) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. En développant $(1+1)^{2m+1}$ par la formule du binôme de Newton, montrer que $\binom{2m+1}{m+1} \leq 4^m$.

2°) Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,
montrer que le produit $\displaystyle\prod_{p \in (\mathbb{P}_{2m+1} \setminus \mathbb{P}_{m+1})} p$ divise le coefficient binomial $\binom{2m+1}{m+1}$.

3°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{p \in \mathbb{P}_n} p \ \leq 4^n$.

4°) En utilisant le fait que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$,
montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $m! > \left(\dfrac{m}{e}\right)^m$.

5°) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $\pi(n)! \leq 4^n$, puis que $\pi(n) \ln \pi(n) - \pi(n) \leq n \ln 4$.

6°) On souhaite montrer que, pour tout $n \geq 3$, $\pi(n) \leq e \dfrac{n}{\ln n}$. Pour cela on raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe un entier $n_0 \geq 3$ tel que $\pi(n_0) > e \dfrac{n_0}{\ln n_0}$.

6.a : Montrer que la fonction $x \mapsto x \ln x - x$ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

6.b : En déduire que $\dfrac{e - \ln 4}{e} < \dfrac{\ln(\ln n_0)}{\ln n_0}$.

6.c : Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ est majorée par $\dfrac{1}{e}$.

6.d : Conclure.

Partie II : une formule de Legendre

Lorsque $n \in \mathbb{N}^*$, on sait qu'il existe une unique famille $(w_p)_{p\in\mathbb{P}}$ d'entiers naturels telle que $n = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{w_p}$. Pour tout $p \in \mathbb{P}$, on notera $w_p = v_p(n)$: c'est la valuation p-adique de l'entier n.

On considère un entier $n \geq 2$ et un nombre premier p.
Pour tout entier naturel k, on note $U_k = (p^k\mathbb{Z}) \cap [1, n]$: U_k est l'ensemble des multiples de p^k qui sont compris entre 1 et n.
On note également $\Omega_k = \{a \in \{1, \ldots, n\} \ / \ v_p(a) = k\}$.

7°) Justifier qu'il existe un plus petit entier $k_0 \geq 0$ tel que $n < p^{k_0}$.
Montrer que $k_0 \geq 1$ et expliciter k_0 en fonction de n et p.

8°) Montrer que, pour tout $k \in \{0, \ldots, k_0 - 1\}$, l'ensemble U_{k+1} est strictement inclus dans U_k et que pour $k \geq k_0$ on a $U_k = \emptyset$.

9°) Prouver que $\Omega_0, \ldots, \Omega_{k_0-1}$ constituent une famille de parties non vides qui partitionnent l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$.

10°) Montrer que $v_p(n!) = \sum_{k\in\mathbb{N}} k|\Omega_k|$, où $|\Omega_k|$ désigne le cardinal de l'ensemble Ω_k.

En déduire la formule de Legendre : $v_p(n!) = \sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$.

Partie III : un théorème de Mertens

11°) Prouver que pour tout $p \in \mathbb{P}$, $\frac{n}{p} - 1 < v_p(n!) \leq \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}$.

12°) En déduire que $n \sum_{p\in\mathbb{P}_n} \frac{\ln p}{p} - \sum_{p\in\mathbb{P}_n} \ln p < \ln n! \leq n \sum_{p\in\mathbb{P}_n} \frac{\ln p}{p} + n \sum_{p\in\mathbb{P}_n} \frac{\ln p}{p(p-1)}$.

13°) Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\sum_{m=2^{r-1}+1}^{2^r} \frac{\ln m}{m(m-1)} \leq \frac{r}{2^r} \ln 2$.

14°) Montrer que, pour tout $x \in]0, 1[$, $\sum_{r=1}^{+\infty} r x^{r-1} = \frac{1}{(x-1)^2}$.

15°) Montrer que $\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{\ln m}{m(m-1)} \leq \ln 4$.

16°) a) Pour tous $u \in [0, 1]$ et $N \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+1} \frac{u^k}{k} = \int_0^1 u \frac{1 - (-ut)^N}{1 + ut} \, dt$.

16.b) En déduire que, pour tout $u \in [0, 1]$, $\ln(1 + u) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{u^k}{k}$.

16.c) En déduire que, pour tout $u \in [0,1]$, $u - \frac{u^2}{2} \leq \ln(1+u) \leq u$.

16.d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 - \frac{1}{2n} \leq n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 1$ et $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \geq \frac{1}{2n}$.

17°) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, il existe un réel $\theta_n \in [0,1]$ tel que : $\ln n! = n \ln n - n + 1 + \theta_n \ln n$.

18°) Prouver que, pour tout $n \geq 2$, $\ln n - (1 + \ln 4) \leq \displaystyle\sum_{p \in \mathbb{P}_n} \frac{\ln p}{p}$.

19°) Prouver que, pour tout $n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{p \in \mathbb{P}_n} \frac{\ln p}{p} \leq \ln n + \ln 4$.

En déduire le théorème de Mertens : $\displaystyle\sum_{p \in \mathbb{P}_n} \frac{\ln p}{p} = \ln n + O(1)$.

Partie IV : un théorème de Tchebychev

20°) On considère la suite $(u_n)_{n \geq 3}$ définie par $u_n = \left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k \ln k}\right) - \ln \ln n$.

Montrer que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2n^2 \ln n} + o\left(\dfrac{1}{n^2 \ln n}\right)$.

En déduire qu'il existe un réel ℓ tel que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k \ln k} = \ln(\ln n) + \ell + o(1)$.

21°) Si $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ sont deux suites de réels et si pour $n \geq 1$ on pose $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$, montrer que, pour tout $N \geq 2$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = A_N b_N + \sum_{n=1}^{N-1} A_n (b_n - b_{n+1})$.

En posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $\psi(n) = \displaystyle\sum_{p \in \mathbb{P}_n} \frac{\ln p}{p}$, en déduire que, pour tout $n \geq 3$, $\displaystyle\sum_{p \in \mathbb{P}_n} \frac{1}{p} = \frac{\psi(n)}{\ln n} + \sum_{k=2}^{n-1} \psi(k) \frac{\ln(1 + \frac{1}{k})}{(\ln k)(\ln(k+1))}$.

22°) Prouver que $\psi(k) \dfrac{\ln(1+\frac{1}{k})}{\ln k \ln(k+1)} = \dfrac{1}{k \ln k} + O\left(\dfrac{1}{k \ln^2 k}\right)$.

En déduire qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\sum_{p \in \mathbb{P}_n} \frac{1}{p} = \ln(\ln n) + \lambda + o(1)$.

23°) Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a $\displaystyle\sum_{p \in \mathbb{P}_n} \frac{1}{p} = \frac{\pi(n)}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k(k+1)}$.

En déduire le théorème de Tchebychev : s'il existe une constante réelle c telle que $\pi(n) \sim c \dfrac{n}{\ln n}$, montrer que $c = 1$.