

# DM 24 : Centrale PSI 2009

Il s'agit d'un sujet supplémentaire pour votre travail personnel. Il n'est pas à rendre. Un corrigé sera fourni le lundi 4 mars.

L'énoncé comporte quelques questions de programmation. En 2009, les programmes de CPGE prévoyaient l'utilisation de Maple ou de Mathematica. Vous pouvez répondre à ces questions en utilisant Python.

## Définitions et notations

On rappelle le résultat suivant : Toute partie  $X$  non vide de  $\mathbf{N}$  possède un plus petit élément noté  $\min X$ .

On rappelle les points suivants de Maple :

- La liste contenant l'unique élément  $a$  est notée  $[a]$ .
- Le couple  $(a, b)$  sera représenté par la liste  $[a, b]$ .
- Pour ajouter l'élément  $x$  (qui peut être un couple) en queue de la liste  $L$  on invoque :  $L := [\text{op}(L), x]$

Et pour Mathematica :

- La liste contenant l'unique élément  $a$  est notée  $\{a\}$ .
- Le couple  $(a, b)$  sera représenté par la liste  $\{a, b\}$ .
- Pour ajouter l'élément  $x$  (qui peut être un couple) en queue de la liste  $L$  on invoque :  $L = \text{Append}[L, x]$

On dira qu'une série à termes réels est semi-convergente si elle converge sans converger absolument.

On dira qu'une suite  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  à valeurs complexes vérifie la propriété  $(P_1)$  si pour toute suite complexe  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  bornée, la série  $\sum a_n u_n$  converge.

On dira qu'une suite  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  à valeurs réelles vérifie la propriété  $(P_2)$  si pour toute suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ , la convergence de la série  $\sum u_n$  entraîne celle de la série  $\sum a_n u_n$ .

L'objectif du problème est d'étudier, en particulier à l'aide de méthodes algorithmiques, des propriétés et des contre-exemples de la théorie des suites et des séries et de caractériser simplement les suites qui vérifient  $(P_1)$  ou  $(P_2)$ .

Les parties I et II sont indépendantes.

Les correcteurs tiendront compte de la présentation, particulièrement de la position correcte des indices.

## semi-convergente

On se donne un réel  $x$ . On note, pour  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$  et on se propose de construire une bijection  $s$  de  $\mathbf{N}^*$  dans  $\mathbf{N}^*$  telle que  $\sum_{n=1}^{\infty} u_{s(n)} = x$ .

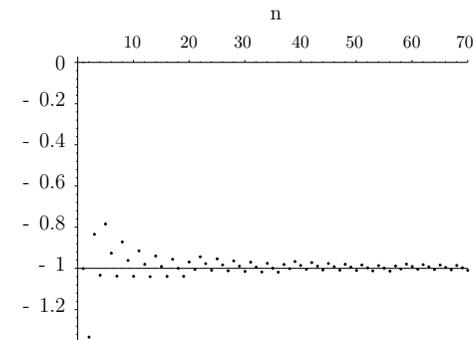
I.A - On définit simultanément par récurrence trois suites d'entiers naturels  $(p_n)_{n \geq 0}$ ,  $(q_n)_{n \geq 0}$  et  $(s_n)_{n \geq 1}$  et une suite  $(S_n)_{n \geq 0}$  de réels de la manière suivante :

- $p_0 = q_0 = 0, S_0 = 0$
- pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , si  $S_n > x$  alors :  
$$q_{n+1} = 1 + q_n, \quad p_{n+1} = p_n, \quad s_{n+1} = 2q_{n+1} - 1$$
  
sinon :  $q_{n+1} = q_n, \quad p_{n+1} = 1 + p_n, \quad s_{n+1} = 2p_{n+1}$   
Dans les deux cas :  $S_{n+1} = S_n + u_{s_{n+1}}$

On aura intérêt à comprendre la construction précédente sous forme algorithmique.

I.A.1) Écrire une fonction suite qui prend en argument  $x$  et l'entier  $n$  et qui renvoie l'affichage de la liste (ou tableau si l'on préfère)  $[s_1, s_2, \dots, s_n]$ .

I.A.2) En modifiant la fonction précédente de façon à ce qu'elle retourne le dessin simultané de la liste des points de coordonnées  $(n, S_n)_{n \leq 70}$  et de la droite horizontale d'ordonnée  $x$  (on ne demande pas d'écrire cette nouvelle fonction), on obtient pour  $x = -1, n = 70$  le dessin suivant :



Que constate-t-on pour la suite  $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$  ? Expliquer le principe de l'algorithme.

**I.B** - On pose dorénavant, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $s(n) = s_n$ .

Prouver, pour  $n \geq 1$ , les propriétés suivantes :

$$\{s(1), s(2), \dots, s(n)\} = \{2, 4, \dots, 2p_n\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\}$$

$$p_n + q_n = n$$

$$S_n = u_{s(1)} + \dots + u_{s(n)}$$

En déduire que  $s$  est injective.

**I.C** -

I.C.1) Démontrer qu'une suite d'entiers convergente est constante à partir d'un certain rang.

I.C.2) On se propose de démontrer que la suite  $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$  croît vers  $+\infty$ .

a) On suppose dans un premier temps que cette suite est majorée.

Utiliser le I.C.1) pour démontrer qu'il existe un entier  $n_0$  tel que pour  $n \geq n_0$ ,

$$S_n > x \quad \text{et} \quad S_n = S_{n_0} - \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{2q_{n_0} + 2k - 2n_0 + 1}.$$

En déduire une contradiction.

b) Déduire du raisonnement précédent que la suite  $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$  diverge vers  $+\infty$ .

I.C.3) Justifier rapidement que  $(q_n)$  tend vers  $+\infty$ .

I.C.4) Déduire de ce qui précède que  $s$  est une bijection de  $\mathbf{N}^*$  sur lui-même.

**I.D** -

I.D.1) Démontrer que, pour tout entier  $n \geq 0$ , on a :

$$|S_{n+1} - x| \leq |S_n - x| \quad \text{ou} \quad |S_{n+1} - x| \leq |u_{s(n+1)}|$$

I.D.2) En déduire que pour tout naturel  $N$ , il existe un entier  $n > N$  tel que

$$|S_{n+1} - x| \leq |u_{s(n+1)}|$$

I.D.3) Justifier l'existence d'un entier  $n_0$  tel que pour  $n \geq n_0$ ,  $p_n \geq 1$  et  $q_n \geq 1$ .

I.D.4) Soit  $n \geq n_0$ . On note  $v_n = \max(|S_n - x|, |u_{2p_{n+1}}|, |u_{2q_{n+1}-1}|)$ .

Démontrer que  $(v_n)_{n \geq n_0}$  est décroissante. En déduire qu'elle converge vers 0.

I.D.5) Démontrer que  $(S_n)$  converge vers  $x$  et conclure.

**I.E** -

I.E.1) Démontrer l'existence d'une constante  $\gamma > 0$  telle que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1) \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

I.E.2) Donner un développement analogue pour  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}$  en fonction de  $\gamma$ .

I.E.3)

a) Justifier, pour tout naturel  $n$  tel que  $p_n \geq 1$  et  $q_n \geq 1$ , l'égalité :

$$S_n = \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{2k-1}.$$

b) En déduire que :

$$S_n = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{p_n}{n - p_n} \right) - \ln 2 + o(1).$$

c) En déduire un équivalent simple de  $p_n$  et de  $q_n$ .

d) Déterminer la limite de :

$$\frac{|u_{s(1)}| + |u_{s(2)}| + \dots + |u_{s(n)}|}{|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n|} \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

## Partie II - Suites vérifiant $(P_1)$ et $(P_2)$

**II.A** - Montrer qu'une suite complexe  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  telle que la série  $\sum a_n$  converge absolument vérifie  $(P_1)$ .

**II.B** - Soit  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite réelle telle que la série  $\sum |a_{n+1} - a_n|$  converge.

II.B.1) Prouver que la suite  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  possède une limite.

II.B.2) Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite réelle telle que la série  $\sum u_n$  converge.

On note  $U_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ . Prouver, pour tout entier naturel  $N$ , la relation :

$$\sum_{n=0}^N a_n u_n = \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) U_n + a_N U_N.$$

En déduire que la suite  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  vérifie  $(P_2)$ .

**II.C** - Soit  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite de nombres complexes telle que la série  $\sum |a_n|$  diverge. Construire une suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  de nombres complexes de module 1 telle que la série  $\sum a_n u_n$  diverge. Caractériser les suites complexes  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  vérifiant  $(P_1)$ .

**II.D** - Soit  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite de réels positifs telle que la série  $\sum a_n$  diverge. On se propose de construire une suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$  tendant vers 0 telle que la série  $\sum a_n \varepsilon_n$  diverge. Pour cela on définit par récurrence trois suites  $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ,  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$  comme suit :

- $p_0 = 0, \varepsilon_0 = 1, A_0 = a_0.$
  - Pour  $n \geq 1$  : 
$$\begin{cases} p_n = 1 + p_{n-1} \text{ et } \varepsilon_n = \frac{\varepsilon_{n-1}}{2} & \text{si } A_{n-1} \geq p_{n-1} \\ p_n = p_{n-1} \text{ et } \varepsilon_n = \varepsilon_{n-1} & \text{sinon} \end{cases}$$
- Dans tous les cas :  $A_n = A_{n-1} + a_n \varepsilon_n.$

II.D.1) Dans cette question seulement on suppose que  $a_0 = 1$  et, pour tout  $n \geq 1$ ,  $a_n = \frac{1}{4(n+1)}.$

Déterminer les 6 premiers termes des suites  $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ,  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}.$

Ecrire une procédure *exemple* qui prend en argument l'entier  $n$  et retourne la liste :

- en Maple :  $[[0, p_0, \varepsilon_0, A_0], [1, p_1, \varepsilon_1, A_1], \dots, [n, p_n, \varepsilon_n, A_n]]$
- en Mathematica :  $\{\{0, p_0, \varepsilon_0, A_0\}, \{1, p_1, \varepsilon_1, A_1\}, \dots, \{n, p_n, \varepsilon_n, A_n\}\}$

II.D.2)

a) Démontrer que pour tout naturel  $N$ , il existe un entier  $n > N$  tel que :

$$p_n = 1 + p_{n-1} \text{ (on pourra raisonner par l'absurde).}$$

En déduire qu'on peut définir une suite  $(n_k)_{k \in \mathbf{N}}$  strictement croissante d'entiers par :

$$\begin{cases} n_0 = 0 \\ n_{k+1} = \min \{n \in \mathbf{N} / n > n_k \text{ et } p_n = 1 + p_{n-1}\} \quad \text{pour } k \geq 0 \end{cases}$$

b) Dans le cas général, calculer  $p_{n_k}, \varepsilon_{n_k}.$

Prouver que la suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$  tend vers 0 et que la série  $\sum \varepsilon_n a_n$  diverge.

c) Déterminer  $n_1, n_2$  et  $n_3$  pour l'exemple de la question III.B.1).

II.D.3) Dans cette question seulement on suppose que :  $\forall n \in \mathbf{N}, a_n = \frac{1}{n+1}.$

a) Écrire une fonction *indexer* qui prend en argument l'entier  $n$  et qui retourne :

- en Maple, la liste  $[[0, n_0], [1, n_1], \dots, [q, n_q]]$
- en Mathematica la liste  $\{\{0, n_0\}, \{1, n_1\}, \dots, \{q, n_q\}\}$

où  $q$  est le plus grand des entiers  $k$  tel que  $n_k \leq n$ . Par exemple l'appel de *indexer*(10000) retourne :

$$[[0, 0], [1, 1], [2, 2], [3, 51]] \quad (\text{resp. } \{\{0, 0\}, \{1, 1\}, \{2, 2\}, \{3, 51\}\})$$

b) Soit  $k \geq 3$  un indice tel que  $n_k - 2 > n_{k-1}.$  Prouver l'inégalité :

$$k - 1 \leq A_{n_{k-1}} \leq k - 1 + \frac{1}{2^{k-1} n_k} \text{ En déduire que } n_{k+1} - 2 > n_k.$$

c) Calculer explicitement la différence  $A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k-1}$  en fonction de  $k, n_k$  et  $n_{k+1}.$  En déduire, pour  $k \geq 3$ , l'inégalité :

$$\frac{1}{2^k} \ln \left( \frac{n_{k+1} + 1}{n_k + 1} \right) \leq A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k-1} \leq \frac{1}{2^k} \ln \left( \frac{n_{k+1}}{n_k} \right).$$

d) Déduire des deux questions précédentes, pour  $k \geq 3$ , l'inégalité :

$$2^k - \frac{2}{n_k} \leq \ln \left( \frac{n_{k+1}}{n_k} \right) \leq 2^k + \frac{1}{n_{k+1}} - \ln \left( 1 + \frac{1}{n_{k+1}} \right) + \ln \left( 1 + \frac{1}{n_k} \right).$$

e) En utilisant une série convenable, étudier la convergence de la suite de terme général  $(\ln n_k - 2^k)$  ; puis prouver l'existence d'une constante  $C > 0$  telle que :

$$n_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} C \exp(2^k).$$

en déduire que :  $A_{n_k} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(\ln n_k)}{\ln 2}.$

puis que :  $A_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(\ln n)}{\ln 2}.$

Que peut-on penser de l'exécution de la fonction *indexer* ?

**II.E** - Soit  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite de réels quelconques telle que, pour toute suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$  de réels tendant vers 0, la série  $\sum \varepsilon_n a_n$  converge.

a) Prouver que la série  $\sum \varepsilon_n |a_n|$  converge.

b) En déduire que la série  $\sum |a_n|$  converge.

**II.F** - Soit maintenant  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite de réels telle que, pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ,

la convergence de la série  $\sum x_n$  entraîne la convergence de la série  $\sum a_n x_n.$

II.F.1) Prouver que la suite  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est bornée.

II.F.2) Soit  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite réelle de limite nulle. Prouver la convergence de la

série  $\sum \varepsilon_n (a_{n+1} - a_n).$

II.F.3) Prouver que la série  $\sum |a_{n+1} - a_n|$  converge.

II.F.4) Caractériser les suites vérifiant  $(P_2).$

••• FIN •••