Feuille d'exercices 16.
Topologie

Exercice 16.1 : (niveau 1)
Montrer que $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ln(x^2 + y^2 + 1)\sin(z) < e^{x+z} \text{ et } x + y - z > 1\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 16.2 : (niveau 1)
Montrer que $\{x + iy \in \mathbb{C} \ / \ x, y \in \mathbb{R},\ \ x^2 + y^2 \leq 3,\ \ x^3 + y^3 - 3xy \geq 0\}$ est un compact de $\mathbb{C}$.

Exercice 16.3 : (niveau 2)
Si F est un fermé d'un espace métrique, montrer qu'il existe une suite décroissante d'ouverts $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$.

Exercice 16.4 : (niveau 2)
On note $E = l^\infty(\mathbb{R})$ et $F = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$. F est-il un ouvert ou un fermé de E ?

Exercice 16.5 : (niveau 2)
Soit X un espace métrique compact.
Montrer que X possède une partie dense et dénombrable.

Exercice 16.6 : (niveau 2)
Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E.
On note $\delta(A)$ le diamètre de A.
Montrer que $\delta(A) = \delta(\overline{A})$. A-t-on $\delta(A) = \delta(\mathring{A})$?

Exercice 16.7 : (niveau 2)
Soit F un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé E tel que $\mathring{F} \neq \emptyset$. Montrer que $F = E$.

Exercice 16.8 : (niveau 2)
E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et F est un fermé de E.

1°) Soit K une partie compacte de E.
Montrer que $F + K = \{f + k/(f, k) \in F \times K\}$ est fermé.

2°) On pose $F = \{(x, 0)/x \in \mathbb{R}\}$ et $K = \{(x, e^x)/x \in \mathbb{R}\}$. Montrer que F et K sont deux fermés de $\mathbb{R}^2$ mais que $F + K$ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 16.9 : (niveau 2)
Soit A et B deux ouverts d'un espace vectoriel normé E.
Montrer que $A+B$ est ouvert. Est-ce vrai avec des fermés ?

Exercice 16.10 : (niveau 2)
Soit A une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé E. Montrer que $\overline{A}$ est compact si et seulement si toute suite d'éléments de A admet une valeur d'adhérence **dans** E.

Exercice 16.11 : (niveau 2)
Soit E un espace vectoriel normé et P une partie de E.
On dit que P est discrète si et seulement si tous les points de P sont des points isolés de P.
La réunion de deux parties discrètes est-elle toujours discrète ?
Montrer que la réunion de deux parties discrète et fermée est discrète et fermée.

Exercice 16.12 : (niveau 2)
Soit A une partie convexe d'un espace vectoriel normé E.
Montrer que $\mathring{A}$ et $\overline{A}$ sont aussi convexes.

Exercice 16.13 : (niveau 3)
Théorème du point fixe. Soit A une partie complète non vide d'un espace métrique E et $f\ : A \longrightarrow A$ une application k-contractante où $k \in [0,1[$.

1°) Montrer qu'il existe au plus un vecteur $l \in E$ tel que $f(l)=l$ (on dit que l est un point fixe de f).

2°) Soit $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ une suite vérifiant la relation de récurrence suivante : $\forall n \in \mathbb{N}\ \ x_{n+1}=f(x_n)$, avec $x_0 \in A$.
a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(x_n,x_{n+1}) \leq k^n d(x_0,x_1)$.
b) Montrer que (x_n) converge et que sa limite est un point fixe de f.

Exercice 16.14 : (niveau 3)
On note E l'ensemble des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, que l'on munit de la norme infinie (norme de la convergence uniforme).

1°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\begin{array}{rccc} P_n : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \end{array}$.
Déterminer la limite de la suite (P_n) d'éléments de E.

2°) On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des applications polynomiales de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que $\mathcal{P}$ n'est pas complet.

3°) Montrer que $(E, \|.\|_\infty)$ est un espace complet.

Exercice 16.15 : (niveau 3)
Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}$. On considère la relation $\mathcal{U}$ sur U définie par :

$$\forall x, y \in U, \ \ (x \ \mathcal{U} \ y) \Longleftrightarrow ([x, y] \subset U),$$

où $[x, y]$ désigne le segment joignant x à y même lorsque $x > y$.

1°) Démontrer que $\mathcal{U}$ est une relation d'équivalence sur U.

2°) Démontrer que les classes d'équivalence de U sont des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Justifier que l'ensemble quotient $U/\mathcal{U}$ est dénombrable.

3°) Qu'a-t-on ainsi démontré ?

Exercice 16.16 : (niveau 3)
$l^\infty(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des suites bornées de réels ; c'est un espace vectoriel normé si on le munit de la norme infinie.
Parmi les ensembles suivants, déterminer lesquels sont des fermés de $l^\infty(\mathbb{R})$:
- l'ensemble des suites croissantes bornées,
- l'ensemble des suites bornées admettant 0 pour valeur d'adhérence,
- l'ensemble $\mathcal{P}_T$ des suites T-périodiques, où $T \in \mathbb{N}^*$,
- la réunion $\displaystyle\bigcup_{T \in \mathbb{N}^*} \mathcal{P}_T$.

Exercices supplémentaires :

Exercice 16.17 : (niveau 1)
Si A est dense dans B et si B est dense dans C, montrer que A est dense dans C.

Exercice 16.18 : (niveau 2)
Soit A une partie non vide de E (où E est un espace vectoriel normé). Si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on note $B(A, \alpha) = \{x \in E / d(x, A) < \alpha\}$.

1°) Montrer que $B(A, \alpha) = \bigcup_{x \in A} B_o(x, \alpha)$.

2°) Montrer que $\overline{A} = \bigcap_{\alpha > 0} B(A, \alpha)$.

3°) En déduire que $\overline{A}$ est une intersection dénombrable d'ouverts.

Exercice 16.19 : (niveau 2)
On suppose que A est une partie dense de B.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_p$ p éléments de A.
Montrer que $A \setminus \{a_1, \ldots, a_p\}$ est dense dans $B \setminus \{a_1, \ldots, a_p\}$.

Exercice 16.20 : (niveau 2)
Montrez que si U et V sont deux ouverts disjoints d'un espace vectoriel normé,
alors $\overset{\circ}{\overline{U}} \cap \overset{\circ}{\overline{V}} = \emptyset$.

Exercice 16.21 : (niveau 2)
On se place dans un espace vectoriel normé noté E. Soit P une partie de E.
On dit que P est discrète si et seulement si tous ses points sont des points isolés de P.
Montrer qu'une partie P d'un espace vectoriel normé E est discrète et fermée si et seulement si il n'existe aucun point d'accumulation de P.

Exercice 16.22 : (niveau 2)
A est un ouvert d'un espace vectoriel normé E et $B \in \mathcal{P}(E)$.

1°) Montrer que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

2°) Montrer que $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cap \overline{B} = \emptyset$.

3°) Si B est dense dans E, montrer que $\overline{A \cap B} = \overline{A}$.

4°) Si A et B sont denses dans E, montrer que $A \cap B$ est dense dans E.

5°) Donner un exemple de parties denses dont l'intersection n'est pas dense.

Exercice 16.23 : (niveau 2)
E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, où $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. A et B sont deux parties de E. On suppose que A est ouvert. Montrer que $\overline{A \cap B} = \overline{A \cap \overline{B}}$.

Exercice 16.24 : (niveau 2)
On dit qu'un point a d'une partie A est isolé dans A si et seulement si il existe un voisinage V de a tel que $V \cap A = \{a\}$.

Soit A une partie sans point isolé. Soit B une partie dense dans A. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $b_1, \ldots, b_p$ p éléments de B. Montrer que $B \setminus \{b_1, \ldots, b_p\}$ est dense dans A.

Exercice 16.25 : (niveau 2)
On dit qu'un point a d'une partie A est isolé dans A si et seulement si il existe un voisinage V de a tel que $V \cap A = \{a\}$.
Soit A une partie sans point isolé. Soit B une partie dense dans A. Montrer que pour tout $a \in A$ et pour tout voisinage V de a, $V \cap B$ est infini.

Exercice 16.26 : (niveau 2)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et A une partie de E. On dit que $l \in E$ est un point d'accumulation de A si et seulement si $l \in \overline{A \setminus \{l\}}$.
Montrer que l'ensemble des points d'accumulation de A est un fermé.

Exercice 16.27 : (niveau 2)
On munit $C([0,1], \mathbb{R})$ de la norme de la convergence en moyenne.

1°) Pour tout entier $n \geq 3$, on note f_n l'élément de E défini par les relations suivantes. $f_n(t) = 0$ lorsque $t \in [0, \frac{1}{2}]$, $f_n(t) = n(t - \frac{1}{2})$ lorsque $t \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]$ et $f_n(t) = 1$ lorsque $t \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1]$.
Montrer que f_n est une suite de Cauchy de E.

2°) Montrer que E n'est pas un espace de Banach.

Exercice 16.28 : (niveau 2)
Soient A et B deux parties d'un espace vectoriel normé E.
Montrer que $\overline{\overset{\circ}{\overline{A \cup B}}} = \overline{\overset{\circ}{\overline{A}}} \cup \overline{\overset{\circ}{\overline{B}}}$.

Exercice 16.29 : (niveau 2)
Pour quels réels α l'ensemble $\{m^\alpha \text{argsh}(n) \ / \ m, n \in \mathbb{N}^*\}$ est-il dense dans $\mathbb{R}_+$?

Exercice 16.30 : (niveau 3) Montrer que $l^1(\mathbb{C})$ est un espace de Banach.

Exercice 16.31 : (niveau 3) On note $E = l^1(\mathbb{C}) = \{(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} / \sum |z_n| \text{ CV }\}$ et on note A l'ensemble des suites géométriques (u_n) de E telles que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1$.
A est-il fermé ? A est-il ouvert ?

Exercice 16.32 : (niveau 3) Soit S un ensemble non dénombrable de réels.

1°) Montrer que S admet au moins un point d'accumulation ℓ, ce qui signifie que $\ell \in \overline{S \setminus \{\ell\}}$.

2°) Montrer que S possède au moins un ensemble dénombrable de points d'accumulation.

3°) Montrer que l'ensemble des points d'accumulation est un fermé.

4°) Montrer que l'ensemble des points d'accumulation de S n'est pas dénombrable.