Résumé de cours :
Semaine 20 : lundi 26 février au vendredi 1er mars.

Limite et continuité d'une fonction

On fixe deux espaces métriques E et F, ainsi qu'une fonction $f : E \longrightarrow F$, dont le domaine de définition sera noté $\mathcal{D}_f$.

1 Limite en un point

Notation. On fixe une partie A de $\mathcal{D}_f$. On fixe également a, qui peut être infini. On suppose qu'il existe au moins une suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$. On fixe aussi l dans $F \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$.

1.1 Caractérisation séquentielle

Définition. $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a en appartenant à A si et seulement si $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \ \left(x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \Longrightarrow f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l\right)$. Dans ce cas, on note $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l$.

Propriété. Lorsque E et F sont des espaces vectoriels normés, si l'on remplace l'une des normes sur E ou F par une norme équivalente, la condition $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l$ est inchangée.

Propriété. **Unicité de la limite.** Si $F \neq \mathbb{R}$, on impose que $l, l' \in F \cup \{\infty\}$ et si $F = \mathbb{R}$, on impose que $l, l' \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$: Si $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l$ et $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l'$, alors $l = l'$.

Propriété. On suppose que $F = \mathbb{C}$ et que $l \in \mathbb{C}$.
Alors $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} \ell$ si et seulement si $(\mathrm{Re}(f)(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} \mathrm{Re}(\ell)) \ \wedge \ (\mathrm{Im}(f)(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} \mathrm{Im}(\ell))$.

Propriété. Si $A \subset B \subset \mathcal{D}_f$ et si $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in B}}{\longrightarrow} l$, alors $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l$.

1.2 Caractérisation par "ε"

Propriété. Si $a \in E$ et $l \in F$,
$f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l \Longleftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in A \ \ (d(x, a) \leq \alpha \Longrightarrow d(f(x), l) \leq \varepsilon)$.
Il faut savoir le démontrer.

Remarque. Dans (1), on peut prendre les deux dernières inégalités indifféremment strictes ou larges.

Propriété. On peut adapter cette caractérisation dans le cas où a et l sont éventuellement infinis. On obtient par exemple :

— Si $l \in F$ et $E = \mathbb{R}$,
$f(x) \underset{\substack{x \to +\infty \\ x \in A}}{\longrightarrow} l \Longleftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \;\; \exists M \in \mathbb{R}_+^* \;\; \forall x \in A \;\; (x \geq M \Longrightarrow \|f(x) - l\| < \varepsilon)$.

— Si $a \in E$ et $F = \mathbb{R}$,
$f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} +\infty \Longleftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}_+^* \;\; \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \;\; \forall x \in A \;\; (\|x - a\| \leq \alpha \Longrightarrow f(x) \geq M)$.

— Si $a = \infty$ et $l \in F$, en choisissant $e_0 \in E$,
$f(x) \underset{\substack{x \to \infty \\ x \in A}}{\longrightarrow} l \Longleftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \;\; \exists M \in \mathbb{R}_+^* \;\; \forall x \in A \;\; (d(x, e_0) \geq M \Longrightarrow d(f(x), l) \leq \varepsilon)$.

— Si $a = \infty$ et $l = \infty$, en fixant $e_0 \in E$ et $f_0 \in F$, $f(x) \underset{\substack{x \to \infty \\ x \in A}}{\longrightarrow} \infty$ si et seulement si
$\forall M \in \mathbb{R}_+^* \;\; \exists N \in \mathbb{R}_+^* \;\; \forall x \in A \;\; (d(x, e_0) \geq N \Longrightarrow d(f(x), f_0) \geq M)$.

Remarque. Une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ peut être vue comme la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & E \\ n & \longmapsto & x_n \end{array}$, définie sur $\mathbb{N}$ qui est une partie non majorée de $\mathbb{R}$. La notion de limite d'une suite dans un espace métrique devient donc un cas particulier de la notion de limite d'une fonction en $+\infty$.

1.3 Caractérisation par voisinages

Définition. Dans $\mathbb{R}$, on appelle voisinage de $+\infty$ toute partie contenant un intervalle $]c, +\infty[$ où $c \in \mathbb{R}$ et voisinage de $-\infty$ toute partie contenant un intervalle $]-\infty, c[$.
Ainsi $\mathcal{V}(+\infty) = \{V \subset \mathbb{R} / \exists c \in \mathbb{R} \;\;]c, +\infty[\subset V\}$ et $\mathcal{V}(-\infty) = \{V \subset \mathbb{R} / \exists c \in \mathbb{R} \;\;]-\infty, c[\subset V\}$.

Définition. On suppose que E n'est pas borné. Soit $e \in E$. On appelle voisinage dans E de ∞ toute partie contenant le complémentaire d'une boule fermée centrée en e.
Ainsi $\mathcal{V}(\infty) = \{V \subset E / \exists R > 0 \;\; E \setminus B_f(e, R) \subset V\}$. On vérfie que $\mathcal{V}(\infty)$ ne dépend pas de e.

Propriété. Avec les définitions précédentes de voisinages, on a encore :
Une intersection de deux voisinages de a est un voisinage a.
Toute partie contenant un voisinage de a est un voisinage de a.

Remarque.
Avec ces nouvelles définitions, les hypothèses portant sur a et A énoncées au début du présent paragraphe se résument ainsi : $\boxed{\text{tout voisinage } V \text{ de } a \text{ rencontre } A}$.

Définition. On dit que $f|_A$ vérifie une certaine propriété au voisinage de a si et seulement s'il existe un voisinage V de a tel que $f|_{V \cap A}$ vérifie cette propriété.
Lorsqu'on énonce une propriété portant sur f au voisinage de $a \in E$, on dit que c'est une propriété locale (de f au voisinage de a). Lorsqu'on énonce une propriété portant sur f au voisinage de ∞ ou de $\pm\infty$, on dit que c'est une propriété asymptotique.

Propriété. $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l \Longleftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(l) \;\; \exists U \in \mathcal{V}(a) \;\; f(U \cap A) \subset V$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Caractère local (ou asymptotique) de la notion de limite.
Pour tout $U_0 \in \mathcal{V}(a)$, $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l \Longleftrightarrow f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A \cap U_0}}{\longrightarrow} l$.
Ainsi la valeur de l'éventuelle limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a pour x appartenant à A ne dépend pas du comportement global de f sur A mais seulement du comportement de $f|_A$ au voisinage de a.
En particulier, si l'on modifie les valeurs de $f(x)$ lorsque $x \notin U_0$, on ne modifie pas la valeur logique de la proposition $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l$.

Définition. Soit $a \in E$ tel que $a \in \overline{\mathcal{D}_f \setminus \{a\}}$. Ainsi, a est un point d'accumulation de $\mathcal{D}_f$. S'il existe $l \in F$ tel que $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}}}{\longrightarrow} l$, on écrit que $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} l$ ou même $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$.

Propriété. Soient A et B deux parties de $\mathcal{D}_f$ qui rencontrent tout voisinage de a.
Alors, $(f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l$ et $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in B}}{\longrightarrow} l) \Longleftrightarrow f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A\cup B}}{\longrightarrow} l$.
Il faut savoir le démontrer.

Définition. Supposons que $E = \mathbb{R}$ et que $a \in \mathbb{R}$.

- Si $a \in \overline{\mathcal{D}_f \cap]a, +\infty[}$, et si $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in \mathcal{D}_f\cap]a,+\infty[}}{\longrightarrow} l$, on note $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x>a}}{\longrightarrow} l$ ou $f(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} l$ et $l = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ ou $l = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$. Il s'agit de la notion de limite à droite du réel a.
- De même, si $a \in \overline{\mathcal{D}_f \cap]-\infty, a[}$, et si $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in \mathcal{D}_f\cap]-\infty,a[}}{\longrightarrow} l$, on note $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x<a}}{\longrightarrow} l$ ou $f(x) \underset{x\to a^-}{\longrightarrow} l$ et $l = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$ ou $l = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$. Il s'agit de la notion de limite à gauche du réel a.

Propriété. On suppose que $E = \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathcal{D}_f \cap]-\infty, a[} \cap \overline{\mathcal{D}_f \cap]a, +\infty[}$.
Alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$ si et seulement si $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x>a}}{\longrightarrow} l$ et $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x<a}}{\longrightarrow} l$.

2 Continuité en un point

Définition. Soit $a \in \mathcal{D}_f$. f est continue en a si et seulement si $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in \mathcal{D}_f}}{\longrightarrow} f(a)$.

Propriété. On suppose que $F = \mathbb{C}$. Soit $a \in \mathcal{D}_f$.
f est continue en a si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues en a.

Propriété. f est continue en a si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :
i) Pour toute suite (x_n) de points de $\mathcal{D}_f$ telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$, $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$.
ii) $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \alpha > 0\ \ \forall x \in \mathcal{D}_f\ \ (d(x, a) \leq \alpha \Longrightarrow d(f(x), f(a)) \leq \varepsilon)$.
iii) $\forall V \in \mathcal{V}(f(a))\ \ \exists U \in \mathcal{V}(a)\ \ f(U \cap \mathcal{D}_f) \subset V$.

Propriété. Soit $a \in \mathcal{D}_f$.
Si $a \notin \overline{\mathcal{D}_f \setminus \{a\}}$ (on dit que a est un point isolé de $\mathcal{D}_f$), f est toujours continue en a.
Si $a \in \overline{\mathcal{D}_f \setminus \{a\}}$, f est continue en a si et seulement si $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in \mathcal{D}_f\setminus\{a\}}}{\longrightarrow} f(a)$.

Remarque. Soient $a \in \mathcal{D}_f$ et $U_0 \in \mathcal{V}(a)$. f est continue en a si et seulement si $f|_{\mathcal{D}_f \cap U_0}$ est continue en a. Ainsi la notion de continuité (au point a) est une notion locale.

Définition. On dit que f est continue si et seulement si elle est continue en chaque point de son domaine de définition.

Propriété. Les applications lipschitziennes sont continues.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soient A une partie de $\mathcal{D}_f$ et $a \in A$. Si f est continue en a, alors $f|_A$ est aussi continue en a.

Corollaire. Soit A une partie incluse dans $\mathcal{D}_f$. Si f est continue, alors $f|_A$ est continue.

Définition. On suppose que $E = \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathcal{D}_f$. On dit que f est continue à droite en a si et seulement si $f|_{[a,+\infty[\cap \mathcal{D}_f}$ est continue en a. On définit de même la notion de continuité à gauche.

Propriété. On suppose que $E = \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathcal{D}_f$.
f est continue en a si et seulement si f est continue à droite et à gauche en a.

Définition. On suppose que f est continue. Soit $D \supset \mathcal{D}_f$. On dit que f se prolonge par continuité sur D si et seulement s'il existe une application $\tilde{f} : D \longrightarrow F$ continue et telle que $\tilde{f}|_{\mathcal{D}_f} = f$.

Définition. Soit $a \in \overline{\mathcal{D}_f} \setminus \mathcal{D}_f$. f admet un prolongement par continuité en a si et seulement si f admet une limite finie en a. Dans ce cas, l'unique prolongement par continuité $\tilde{f}$ de f est donné par $\tilde{f}(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$.

Propriété. Soient $A \subset E$ et f et g deux applications continues de A dans F.
Si f et g coïncident sur une partie dense dans A, alors $f = g$.
Il faut savoir le démontrer.

3 Théorèmes de composition

Notation. Dans ce paragraphe, on fixe un troisième espace métrique noté G et une seconde fonction $g\ : F \longrightarrow G$, définie sur $\mathcal{D}_g$.

Propriété. Soit B une partie de $\mathcal{D}_g$ telle que $f(A) \subset B$. Soit $m \in G \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$.
Pour que $g(f(x)) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} m$, il suffit que $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l$ (auquel cas B rencontre tout voisinage de l) et que $g(y) \underset{\substack{y \to l \\ y \in B}}{\longrightarrow} m$.

Corollaire. On suppose que $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$ et on fixe $a \in \mathcal{D}_f$.
Si f est continue en a et g en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Corollaire. On suppose que $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$.
Si f et g sont continues, alors $g \circ f$ est continue (et définie sur $\mathcal{D}_f$).

Corollaire. On suppose que $f(A) \subset \mathcal{D}_g$. Si $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} b$ et si g est continue en b, alors $g(f(x)) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} g(b)$.

Propriété. Limite en un point d'une application à valeurs dans un produit.
Supposons que $F = F_1 \times \cdots \times F_q$, où $F_1, \ldots, F_q$ sont des espaces vectoriels normés et notons $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) = (f_1(x), \ldots, f_q(x)) \end{array}$.
Soient A une partie de $\mathcal{D}_f$, $a \in \overline{A}$ et $l = (l_1, \ldots, l_q) \in F$. Alors,
$f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l$ si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}_q$, $f_i(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l_i$.

Propriété. Continuité en un point d'une application à valeurs dans un produit.
Supposons que $F = F_1 \times \cdots \times F_q$, où $F_1, \ldots, F_q$ sont des espaces vectoriels normés et notons $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) = (f_1(x), \ldots, f_q(x)) \end{array}$. Soit $a \in \mathcal{D}_f$. Alors,
f est continue en a si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}_q$, f_i est continue en a.

Propriété. Limite d'une application à valeurs dans un espace de dimension finie. Supposons que F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie dont une base est $(e_1, \ldots, e_q)$ et notons $f(x) = \sum_{i=1}^{q} f_i(x) e_i$. Soient A une partie de $\mathcal{D}_f$, $a \in \overline{A}$ et $l = \sum_{i=1}^{q} l_i e_i \in F$. Alors,
$f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l$ si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}_q$, $f_i(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l_i$.

Propriété. Continuité en un point d'une application à valeurs dans un espace de dimension finie. Supposons que F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie dont une base est $(e_1, \ldots, e_q)$ et notons $f(x) = \sum_{i=1}^{q} f_i(x) e_i$. Si $a \in \mathcal{D}_f$, f est continue en a si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}_q$, f_i est continue en a.

4 Opérations algébriques sur les limites

4.1 Somme de deux applications à valeurs vectorielles

Notation.
Dans ce paragraphe, on fixe une seconde fonction $g\ : E \longrightarrow F$, définie sur $\mathcal{D}_g$.
On suppose que $A \subset \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$.

Propriété. Si $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l$ et $g(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l'$, alors $(f+g)(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l + l'$.

Remarque. C'est valable dans le cadre des limites infinies, à condition d'éviter la forme indéterminée $\infty - \infty$, c'est-à-dire lorsque l et l' sont les deux éléments distincts de $\{+\infty, -\infty\}$.

Propriété. Soit $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$. Si f et g sont continues en a, $f + g$ est continue en a.

Corollaire. La somme de deux applications continues est continue.

4.2 Produit d'une application scalaire par une application vectorielle

Notation. Dans ce paragraphe, on suppose que f est une application de E dans $\mathbb{K}$ et que g est une application de E dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé F. Ainsi f est une "application scalaire" et g est une "application vectorielle". On suppose que $A \subset \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$.

Propriété. Si $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l$ et $g(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l'$, alors $(fg)(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} ll'$.

Remarque. C'est valable dans le cadre des limites infinies, à condition d'éviter la forme indéterminée $0 \times \infty$.

Propriété. Soit $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$. Si f et g sont continues en a, fg est aussi continue en a.

Corollaire. Le produit d'une application scalaire continue par une application vectorielle continue est continue.

Propriété. Soit A une partie de E. L'ensemble $\mathcal{C}(A, F)$ des applications continues de A dans F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $\mathcal{C}(A, \mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Propriété. On suppose que f est une application de E dans $\mathbb{K}^*$.
Si $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l \in \mathbb{K}$ alors $(\frac{1}{f})(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} \frac{1}{l}$.

Remarque. Cette propriété est valable avec des limites infinies dans les cas suivants :
- Si $l = \infty$, en convenant que $\frac{1}{\infty} = 0$.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $l = 0^+$ (c'est-à-dire que $l = 0$ et que f est strictement positive au voisinage de a), en convenant que $\frac{1}{0^+} = +\infty$.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $l = 0^-$, en convenant que $\frac{1}{0^-} = -\infty$.

5 Cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On suppose ici que $F = \mathbb{R}$.

Propriété : passage à la limite sur une inégalité *large* :
Si $\forall x \in A\ \ f(x) \leq g(x)$, $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l$ et $g(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l'$, alors $l \leq l'$.

Principe du tunnel (pour des inégalités strictes) :
Si $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ et $\alpha < \ell < \beta$, alors, au voisinage de a, $\alpha < f(x) < \beta$.

Corollaire. Si $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ alors $f|_A$ est bornée au voisinage de a.

Propriété. Principe des gendarmes.
Si $\forall x \in A \ \ h_1(x) \leq h_2(x) \leq h_3(x)$, $h_1(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l$ et $h_3(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l$, alors $h_2(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l$.

Il faut savoir le démontrer.

Remarque. On peut adapter le principe des gendarmes au cas où $l = \pm\infty$.

6 Cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème de la limite monotone : Soit $(m, M) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ avec $m < M$ et $f \ :]m, M[\longrightarrow \mathbb{R}$.
Si f est croissante, alors $f(x) \underset{\substack{x \to M \\ x \in I}}{\longrightarrow} \sup_{y \in I} f(y) \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f(x) \underset{\substack{x \to m \\ x \in I}}{\longrightarrow} \inf_{y \in I} f(y) \in \overline{\mathbb{R}}$.
Si f est décroissante, alors $f(x) \underset{\substack{x \to M \\ x \in I}}{\longrightarrow} \inf_{y \in I} f(y) \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f(x) \underset{\substack{x \to m \\ x \in I}}{\longrightarrow} \sup_{y \in I} f(y) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit $(m, M) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ avec $m < M$ et $f \ :]m, M[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application monotone. Pour tout $a \in I$, f possède en a une limite à droite, notée $f(a^+)$, et une limite à gauche, notée $f(a^-)$. De plus, si f est croissante, $f(a^-) \leq f(a) \leq f(a^+)$, et si f est décroissante, $f(a^-) \geq f(a) \geq f(a^+)$.
f est discontinue en a si et seulement si $f(a^+) \neq f(a^-)$ et dans ce cas $|f(a^+) - f(a^-)|$ s'appelle le saut de discontinuité de f en a.
Il faut savoir le démontrer.