Comparaison au voisinage d'un point

Table des matières

Notation.
Dans tout ce chapitre, on fixe un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé E, où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On fixe également $A \subset E$ et $a \in E \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$, et on suppose que tout voisinage V de a rencontre A.

L'objet de ce chapitre est d'étudier des applications définies sur A et à valeurs dans un espace vectoriel normé, au voisinage du point a.

1 La relation de domination

Définition. Soient F et G deux espaces vectoriels normés, $f : A \longrightarrow F$ et $g : A \longrightarrow G$ deux applications.
On dit que f est dominée par g au voisinage de a si et seulement si
(1) : $\exists V \in \mathcal{V}(a)\ \exists C \in \mathbb{R}_+^*\ \forall x \in V \cap A\ \ \|f(x)\|_F \leq C\|g(x)\|_G$.

On note alors $f(x) = \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\mathbf{O}}(g(x))$ (notation de Landau) ou bien $f(x) \preceq g(x)$ (notation de Hardy).

Remarque. Ici, la dernière inégalité de (1) ne peut pas être remplacée par une inégalité stricte, car g peut s'annuler au voisinage de a, c'est-à-dire qu'il est possible que, pour tout $V \in \mathcal{V}(a)$, $\exists x \in V\ \ g(x) = 0$.

Remarque. $f = \mathbf{O}(g)$ si et seulement si $\|f(x)\| = \mathbf{O}(\|g(x)\|)$.

Cas particulier des suites. Si $E = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{N}$ et $a = +\infty$, f et g représentent en fait des suites $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ et $(y_n) \in G^{\mathbb{N}}$. Ainsi $x_n = \mathbf{O}(y_n)$ si et seulement si
$\exists N \in \mathbb{N}\ \exists C \in \mathbb{R}_+^*\ \forall n \geq N\ \ \|x_n\|_F \leq C\|y_n\|_G$.

Exemples. Soient F un espace vectoriel normé et $f : A \longrightarrow F$.
Alors $0 = \mathbf{O}(f)$, mais $f = \mathbf{O}(0)$ si et seulement si f est nulle au voisinage de a.
$f = \mathbf{O}(1)$ si et seulement si f est bornée au voisinage de a.

Exemple. $x \sin x = O(x)$, au voisinage de $+\infty$ ou bien de 0.

Propriété. Soient F un espace vectoriel normé et $f : A \longrightarrow F$ une application.
Alors $\boxed{\mathbf{O}(\mathbf{O}(f)) = \mathbf{O}(f)}$.

Démonstration.
Cette propriété signifie que si $g = \mathbf{O}(f)$ et si $h = \mathbf{O}(g)$, alors $h = \mathbf{O}(f)$, mais elle ne s'intéresse pas au problème réciproque (si $h = \mathbf{O}(f)$, existe-t-il g tel que $h = \mathbf{O}(g)$ et $g = \mathbf{O}(f)$?) d'ailleurs vrai ici mais qui dans d'autres cas pourra être faux. Ainsi il serait plus exact de noter $\mathbf{O}(\mathbf{O}(g)) \subset \mathbf{O}(g)$, mais l'usage est d'utiliser la notation d'égalité.
Cette propriété se lit donc de la manière suivante. Si une application définie sur A est un 'grand O' d'un 'grand O' de f, c'est un 'grand O' de f. En voici la démonstration.
Soient G et H deux espaces vectoriels normés, $g : A \longrightarrow G$ et $h : A \longrightarrow H$ deux applications. On suppose qu'au voisinage de a, $g = \mathbf{O}(f)$ et $h = \mathbf{O}(g)$. Ainsi il existe

deux voisinages de a, V et V', et deux réels strictement positifs C et C' tels que, pour tout $x \in V \cap A$, $\|g(x)\| \leq C\|f(x)\|$ et pour tout $x \in V' \cap A$, $\|h(x)\| \leq C'\|g(x)\|$.
$V \cap V'$ est encore un voisinage de a et pour tout $x \in (V \cap V') \cap A$, $\|h(x)\| \leq C'C\|f(x)\|$.
On a montré que $h = \mathbf{O}(f)$. □

ATTENTION : On peut avoir $f(x) = O(h(x))$ et $g(x) = O(h(x))$, mais $f(x) \neq g(x)$, car ici, cette égalité n'est plus symétrique ; elle correspond en réalité à une inclusion. De même, si $f(x) + O(h(x)) = g(x) + O(h(x))$, on peut avoir $f(x) \neq g(x)$.

Propriété. Soient F un espace vectoriel normé et $f : A \longrightarrow F$ une application. Alors $\boxed{\mathbf{O}(f) + \mathbf{O}(f) = \mathbf{O}(f)}$.

Démonstration.
Soit G un espace vectoriel normé, $g : A \longrightarrow G$ et $h : A \longrightarrow G$ deux applications. On suppose qu'au voisinage de a, $g = \mathbf{O}(f)$ et $h = \mathbf{O}(f)$. Ainsi il existe deux voisinages de a, V et V', et deux réels strictement positifs C et C' tels que, pour tout $x \in V \cap A$, $\|g(x)\| \leq C\|f(x)\|$ et pour tout $x \in V' \cap A$, $\|h(x)\| \leq C'\|f(x)\|$.
$V \cap V'$ est encore un voisinage de a et pour tout $x \in (V \cap V') \cap A$,
$\|(g+h)(x)\| \leq \|g(x)\| + \|h(x)\| \leq (C + C')\|f(x)\|$. On a montré que $g + h = \mathbf{O}(f)$. □

Propriété. Soient F un espace vectoriel normé, $f : A \longrightarrow F$ une application à valeurs vectorielles et $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{K}$ une application à valeurs scalaires. Alors $\boxed{\mathbf{O}(\varphi).\mathbf{O}(f) = \mathbf{O}(\varphi.f).}$

Démonstration.
Soient G un espace vectoriel normé, $g : A \longrightarrow G$ et $\Psi : A \longrightarrow \mathbb{K}$ deux applications. On suppose qu'au voisinage de a, $\Psi = \mathbf{O}(\varphi)$ et $g = \mathbf{O}(f)$. Ainsi il existe deux voisinages de a, V et V', et deux réels strictement positifs C et C' tels que, pour tout $x \in V \cap A$, $|\Psi(x)| \leq C|\varphi(x)|$ et pour tout $x \in V' \cap A$, $\|g(x)\| \leq C'\|f(x)\|$.
$V \cap V'$ est encore un voisinage de a et pour tout $x \in (V \cap V') \cap A$,
$\|(\Psi.g)(x)\| = |\Psi(x)|\|g(x)\| \leq CC'|\varphi(x)|\|f(x)\| = CC'\|\varphi(x).f(x)\|$. On a montré que $\Psi.g = \mathbf{O}(\varphi.f)$. □

Propriété. Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$. Alors $\boxed{\mathbf{O}(f)^\alpha = \mathbf{O}(f^\alpha)}$.

Démonstration : Exercice.

Propriété. Soient F et G deux espaces vectoriels normés, $f : A \longrightarrow F$ et $g : A \longrightarrow G$ deux applications. $\boxed{\text{Si } f(x) = \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\mathbf{O}}(g(x)) \text{ et si } g(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} 0, \text{ alors } f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} 0}$.

Démonstration.
Il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ et $C \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\forall x \in V \cap A$ $\|f(x)\|_E \leq C\|g(x)\|_F$, or $C\|g(x)\| \underset{\substack{x \to a \\ x \in V \cap A}}{\longrightarrow} 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in V \cap A}}{\longrightarrow} 0$, or la notion de limite est une notion locale et $V \in \mathcal{V}(a)$, donc $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} 0$. □

Propriété. Soient F et G deux espaces vectoriels normés, $f : A \longrightarrow F$ et $g : A \longrightarrow G$ deux applications. On suppose que $g(x)$ est non nulle au voisinage de a, c'est-à-dire qu'il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ pour lequel $\forall x \in V \cap A$ $g(x) \neq 0$.

Alors $\boxed{f = \mathbf{O}(g) \text{ si et seulement si } x \longmapsto \dfrac{\|f(x)\|}{\|g(x)\|} \text{ est bornée au voisinage de } a}$.

Démonstration : Exercice.

Propriété. (Hors programme)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs.
$\boxed{\text{S'il existe } N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N \ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}, \text{ alors } u_n = \mathbf{O}(v_n).}$

Démonstration.
Pour tout $n \geq N$, $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \dfrac{u_n}{v_n}$, donc la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq N}$ est décroissante. Ainsi, pour tout $n \geq N$, $\dfrac{u_n}{v_n} \leq \dfrac{u_N}{v_N}$. Posons $C = \dfrac{u_N}{v_N} > 0$.
Pour tout $n \geq N$, $0 < u_n \leq C v_n$, donc $u_n = \mathbf{O}(v_n)$. $\square$

2 La relation de prépondérance

Définition. Soient F et G deux espaces vectoriels normés, $f : A \longrightarrow F$ et $g : A \longrightarrow G$ deux applications.
On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a si et seulement si
(1) : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists V \in \mathcal{V}(a) \ \forall x \in V \cap A \ \ \|f(x)\|_F \leq \varepsilon \|g(x)\|_G$.
On note alors $f(x) = \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{o}(g(x))$ (notation de Landau) ou bien $f(x) << g(x)$ (notation de Hardy).

Remarque. Ici, la dernière inégalité de (1) ne peut pas être remplacée par une inégalité stricte.

Remarque. $f = o(g)$ si et seulement si $\|f(x)\| = o(\|g(x)\|)$.

Cas particulier des suites. Si $E = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{N}$ et $a = +\infty$, f et g représentent en fait des suites $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ et $(y_n) \in G^{\mathbb{N}}$. Ainsi $x_n = o(y_n)$ si et seulement si
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ \ \|x_n\|_F \leq \varepsilon \|y_n\|_G$.

Exemples. Soient F un espace vectoriel normé et $f : A \longrightarrow F$.
Alors $0 = o(f)$, mais $f = o(0)$ si et seulement si f est nulle au voisinage de a.
$\boxed{f = o(1) \text{ si et seulement si } f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} 0.}$

Remarque. cette dernière propriété est importante car elle explicite le lien entre la notion de "petit o" et la notion de limite.

Exemple. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha < \beta$. Alors
au voisinage de $+\infty$, $x^\alpha = o(x^\beta)$ et
au voisinage de 0^+, $x^\beta = o(x^\alpha)$.

ATTENTION : On peut avoir $f(x) = o(h(x))$ et $g(x) = o(h(x))$, mais $f(x) \neq g(x)$, car ici également, cette égalité n'est plus symétrique ; elle correspond en réalité à une inclusion.
De même, si $f(x) + o(h(x)) = g(x) + o(h(x))$, on peut avoir $f(x) \neq g(x)$.

Propriété. Soient F un espace vectoriel normé et $f : A \longrightarrow F$ une application. Alors $\boxed{o(f) = \mathbf{O}(f)}$.

Remarque. Ici tout particulièrement cette "égalité" n'est valable que dans un sens.

Propriété. Soient F un espace vectoriel normé et $f : A \longrightarrow F$ une application.
Alors $\boxed{o(\mathbf{O}(f)) = o(f) \text{ et } \mathbf{O}(o(f)) = o(f)}$ (donc aussi $o(o(f)) = o(f)$).

Démonstration.
Soient G et H deux espaces vectoriels normés, $g : A \longrightarrow G$ et $h : A \longrightarrow H$ deux applications. On suppose qu'au voisinage de a, $g = \mathbf{O}(f)$ et $h = o(g)$. Ainsi il existe un voisinage V de a et un réel strictement positif C tel que, pour tout $x \in V \cap A$, $\|g(x)\| \leq C\|f(x)\|$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $V' \in \mathcal{V}(a)$ tel que pour tout $x \in V' \cap A$, $\|h(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{C}\|g(x)\|$.
$V \cap V'$ est encore un voisinage de a et pour tout $x \in (V \cap V') \cap A$, $\|h(x)\| \leq \varepsilon\|f(x)\|$.
On a montré que $h = o(f)$.
La seconde partie de la propriété se démontre de la même façon. □

Propriété. Soient F un espace vectoriel normé et $f : A \longrightarrow F$ une application.
Alors $\boxed{o(f) + o(f) = o(f)}$.

Démonstration.
Soient G un espace vectoriel normé, $g : A \longrightarrow G$ et $h : A \longrightarrow G$ deux applications.
On suppose qu'au voisinage de a, $g = o(f)$ et $h = o(f)$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe deux voisinages de a, V et V' tels que, pour tout $x \in V \cap A$, $\|g(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|f(x)\|$ et pour tout $x \in V' \cap A$, $\|h(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|f(x)\|$.
$V \cap V'$ est encore un voisinage de a et pour tout $x \in (V \cap V') \cap A$,
$\|(g + h)(x)\| \leq \|g(x)\| + \|h(x)\| \leq \varepsilon\|f(x)\|$. On a montré que $g + h = o(f)$. □

Propriété. Soient F un espace vectoriel normé, $f : A \longrightarrow F$ une application à valeurs vectorielles et $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{K}$ une application à valeurs scalaires.
Alors $\boxed{o(\varphi).\mathbf{O}(f) = o(\varphi.f) \text{ et } \mathbf{O}(\varphi).o(f) = o(\varphi.f)}$ (donc aussi $o(\varphi).o(f) = o(\varphi.f)$).

Démonstration.
Soient G un espace vectoriel normé, $g : A \longrightarrow G$ et $\Psi : A \longrightarrow \mathbb{K}$ deux applications.
On suppose qu'au voisinage de a, $\Psi = o(\varphi)$ et $g = \mathbf{O}(f)$. Ainsi il existe un voisinage V de a et un réel strictement positif C tel que, pour tout $x \in V \cap A$, $\|g(x)\| \leq C\|f(x)\|$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $V' \in \mathcal{V}(a)$ tel que pour tout $x \in V' \cap A$, $|\Psi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{C}|\varphi(x)|$.
$V \cap V'$ est encore un voisinage de a et pour tout $x \in (V \cap V') \cap A$,
$\|(\Psi.g)(x)\| = |\Psi(x)|\|g(x)\| \leq \varepsilon|\varphi(x)|\|f(x)\| = \varepsilon\|\varphi(x).f(x)\|$.
On a montré que $\Psi.g = o(\varphi.f)$.
La seconde partie de la propriété se démontre de la même façon. □

Propriété. Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $f\ : A \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$. Alors $\boxed{o(f)^\alpha = o(f^\alpha)}$.

Démonstration : Exercice.

Propriété. Soient F et G deux espaces vectoriels normés, $f\ : A \longrightarrow F$ et $g\ : A \longrightarrow G$ deux applications. On suppose que $g(x)$ est non nulle au voisinage de a, c'est-à-dire qu'il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ pour lequel $\forall x \in V \cap A\ \ g(x) \neq 0$.

Dans ces conditions $\boxed{f = o(g) \text{ si et seulement si } \dfrac{\|f(x)\|}{\|g(x)\|} \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} 0}$.

Démonstration : Exercice.

Théorème des croissances comparées : Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$ et $a > 1$.

1. Les suites $\ln^\alpha(n)$, n^β, a^n et $n!$ tendent vers $+\infty$ et chacune est négligeable devant les suivantes.
2. Au voisinage de $+\infty$, les fonctions $\ln^\alpha x$, x^β et $e^{\gamma x}$ tendent vers $+\infty$ et chacune est négligeable devant les suivantes.
3. Au voisinage de 0^+, $|\ln x|^\alpha = o\Big(\dfrac{1}{x^\beta}\Big)$.
4. Au voisinage de $-\infty$, $e^{\gamma x} = o\Big(\dfrac{1}{|x|^\beta}\Big)$.

Démonstration.

$\diamond$ Dans le chapitre "Dérivation et intégration, une première approche", lors de la définition des fonctions ln et exp, on a prouvé
que $\ln x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $\ln x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$, $\dfrac{\ln x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et
que $e^t \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$, $e^t \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $\dfrac{e^t}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$\diamond$ Ainsi par composition des limites, $x^\beta = e^{\beta \ln x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $\dfrac{\ln(x^\beta)}{x^\beta} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
or $\ln(x^\beta) = \beta \ln x$, donc $\dfrac{\ln x}{x^\beta} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
En remplaçant β par $\frac{\beta}{\alpha}$, on en déduit que $\dfrac{\ln x}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Or $u^\alpha = e^{a \ln u} \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc par composition des limites, $\dfrac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = \Big(\dfrac{\ln x}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\Big)^\alpha \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$\diamond$ $e^t \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $\dfrac{\ln^\alpha(e^t)}{(e^t)^\beta} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, i.e $\dfrac{t^\alpha}{e^{\beta t}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On a ainsi prouvé l'item numéro 2.

$\diamond$ En restreignant à $\mathbb{N}$, on en déduit que $\ln^\alpha(n) = o(n^\beta)$ et que $n^\beta = o(e^{n \ln a}) = o(a^n)$, car $\ln a > 0$.
De plus on sait que la série $\sum \dfrac{a^n}{n!}$ converge (et a pour somme e^a), donc $\dfrac{a^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On a ainsi prouvé l'item numéro 1.

$\diamond$ $\frac{1}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, donc $\dfrac{\ln^\alpha \frac{1}{x}}{(\frac{1}{x})^\beta} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, i.e $|\ln x|^\alpha \underset{x\to 0^+}{=} o\Big(\dfrac{1}{x^\beta}\Big)$.

◇ $t^\alpha e^{-\beta t} = \dfrac{t^\alpha}{e^{\beta t}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $(-t)^\alpha e^{\beta t} \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $e^{\beta t} \underset{t\to-\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{|t|^\alpha}\Big)$. □

Exemple. Montrons que $e^{-x^2} \underset{x\to+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{x^5}\Big)$.
Le théorème des c.c n'affirment pas directement ce résultat, mais on peut écrire : $x^5 e^{-x^2} = e^{5\ln x - x^2} = e^{-x^2+o(x^2)}$, d'après les c.c, donc $x^5 e^{-x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui conclut.

Exemple. Calcul de la limite en $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{\ln x}}}{x^2}$.
Ici encore, on ne peut pas appliquer directement les c.c. D'ailleurs, si l'on considère que l'exponentielle l'emporte toujours sur une puissance, on pourrait croire que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui est faux. En effet, $f(x) = e^{\sqrt{\ln x}-2\ln x}$,
or $\sqrt{\ln x} - 2\ln x = -2\ln x + o(\ln x)$ et $-2\ln x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, donc $\sqrt{\ln x} - 2\ln x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, puis $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice. Soient $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et $(\alpha',\beta')\in\mathbb{R}^2$. Montrer que, au voisinage de $+\infty$, $x^\alpha \ln^\beta x = o(x^{\alpha'}\ln^{\beta'} x)$ si et seulement si $(\alpha,\beta) < (\alpha',\beta')$ pour l'ordre lexicographique, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha < \alpha'$ ou ($\alpha = \alpha'$ et $\beta < \beta'$).

Solution : $x^\alpha \ln^\beta x = o(x^{\alpha'}\ln^{\beta'} x) \iff x^{\alpha-\alpha'}\ln^{\beta-\beta'} x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc il suffit de montrer que, lorsque $\delta,\gamma\in\mathbb{R}$, $x^\delta \ln^\gamma x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \iff (\delta < 0) \vee ((\delta = 0)\wedge(\gamma < 0))$.
Or, si $\delta < 0$, d'après les c.c, $x^\delta \ln^\gamma x = \dfrac{\ln^\gamma x}{x^{-\delta}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et si $\delta = 0$ avec $\gamma < 0$, $x^\delta \ln^\gamma x = \ln^\gamma x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On démontre de même la contraposée de l'implication réciproque.

3 La relation d'équivalence

3.1 Définition

Définition. Soient F un espace vectoriel normé, $f : A \longrightarrow F$ et $g : A \longrightarrow F$ deux applications.
$\boxed{\text{On dit que } f \text{ est équivalente à } g \text{ au voisinage de } a \text{ si et seulement si } f - g = o(g).}$
On note alors $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\sim} g(x)$.

Ainsi, $\boxed{f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\sim} g(x) \iff f = g + o(g)}$.

Exemple. Soit $k\in\mathbb{N}$. Au voisinage de 0, $t^{k+1} = o(t^k)$ et, au voisinage de $+\infty$, $t^k = o(t^{k+1})$.
Ainsi, si $P(X) = \displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k X^k$ est un polynôme à coefficients complexes, avec $a_n \neq 0$ et $a_m \neq 0$, au voisinage de 0, $P(t) \sim a_m t^m$ et au voisinage de $+\infty$, $P(t) \sim a_n t^n$.

Propriété. La relation "$\sim$" est une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}(A, F)$.

Démonstration.
• Soit $(f, g) \in \mathcal{F}(A, F)^2$ tel que $f \sim g$. Montrons que $g = \mathbf{O}(f)$.
En effet, il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que pour tout $x \in V \cap A$, $\|f(x) - g(x)\| \leq \frac{1}{2}\|g(x)\|$.
Soit $x \in V \cap A$. $\|g(x)\| - \|f(x)\| \leq \|f(x) - g(x)\| \leq \frac{1}{2}\|g(x)\|$, donc $\frac{1}{2}\|g(x)\| \leq \|f(x)\|$, ainsi $\|g(x)\| \leq 2\|f(x)\|$.
• Soit $f \in \mathcal{F}(A, F)$. $f - f = 0 = o(f)$, donc la relation est réflexive.
Soit $(f, g) \in \mathcal{F}(A, F)^2$ tel que $f \sim g$. D'après le premier point,
$g - f = o(g) = o(\mathbf{O}(f)) = o(f)$, donc $g \sim f$, ce qui prouve la symétrie.
Soit $(f, g, h) \in \mathcal{F}(A, F)^3$ tel que $f \sim g$ et $g \sim h$.
$h - f = (h - g) + (g - f) = o(h) + o(g)$, or d'après le premier point $g = \mathbf{O}(h)$, donc $h - f = o(h) + o(\mathbf{O}(h)) = o(h) + o(h) = o(h)$. Ainsi $f \sim h$, ce qui prouve la transitivité.
□

Propriété. Soient F un espace vectoriel normé, $f \in \mathcal{F}(A, F)$ et $l \in F$.
$\boxed{\text{Si } f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l \text{ et si } l \neq 0, \text{ alors } f(x) \sim l.}$

Démonstration.
$1 = \dfrac{1}{\|l\|}\|l\| = \mathbf{O}(l)$, donc $f(x) - l = o(1) = o(\mathbf{O}(l)) = o(l)$, ce qui montre que $f(x) \sim l$.
□

Remarque. $f(x) \sim 0$ si et seulement si f est nulle au voisinage de a, donc en général, $f(x) \not\sim 0$, même lorsque $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} 0$.

Propriété. Soient $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : A \longrightarrow \mathbb{K}$ deux applications scalaires. On suppose que g est non nulle au voisinage de a, c'est-à-dire qu'il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $\forall x \in V \ \ g(x) \neq 0$. Alors $\boxed{f \sim g \Longleftrightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} 1.}$

Démonstration.
$f \sim g \Longleftrightarrow f - g = o(g) \Longleftrightarrow \dfrac{f - g}{g} \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} 0 \Longleftrightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} 1.$ □

3.2 Propriétés de stabilité de la relation d'équivalence

Propriété. Soient F un espace vectoriel normé, et $f : A \longrightarrow F$ et $g : A \longrightarrow F$ deux applications à valeurs vectorielles. $\boxed{\text{Si } f \sim g, \text{ alors } \|f\| \sim \|g\|.}$

Démonstration.
$\|f\| - \|g\| = \mathbf{O}(\|f - g\|) = \mathbf{O}(o(g)) = o(g) = o(\|g\|)$, donc $\|f\| \sim \|g\|$. □

Propriété. **Stabilité du produit.** Soient F un espace vectoriel normé, $f : A \longrightarrow F$ et $g : A \longrightarrow F$ deux applications à valeurs vectorielles et $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{K}$ et $\Psi : A \longrightarrow \mathbb{K}$ deux applications à valeurs scalaires.
$\boxed{\text{Si } \varphi \sim \Psi \text{ et si } f \sim g, \text{ alors } \varphi.f \sim \Psi.g.}$

Démonstration.
$\varphi.f - \Psi.g = \varphi.f - \varphi.g + \varphi.g - \Psi.g = \varphi.o(g) + o(\Psi).g$, donc
$\varphi.f - \Psi.g = \mathbf{O}(\Psi).o(g) + o(\Psi).\mathbf{O}(g) = o(\Psi.g)$, donc $\varphi.f \sim \Psi.g$. □

Propriété. Soient $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : A \longrightarrow \mathbb{K}$ deux applications scalaires. On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a et que $f \sim g$.
Alors f ne s'annule pas au voisinage de a et $\dfrac{1}{f(x)} \sim \dfrac{1}{g(x)}$.

Démonstration.
$g = \mathbf{O}(f)$, donc, au voisinage de a, si $f(x) = 0$ alors $g(x) = 0$. Ainsi f ne s'annule pas au voisinage de a. $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} 1$, donc $\dfrac{g(x)}{f(x)} \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} 1$, ce qui prouve que $\dfrac{1}{f(x)} \sim \dfrac{1}{g(x)}$. □

Propriété. Soient $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications à valeurs réelles. $\boxed{\text{Si } f \sim g, \text{ alors } f \text{ et } g \text{ ont le même signe au voisinage de } a}$ au sens strict, c'est-à-dire que $f(x)$ et $g(x)$ sont tous deux nuls, ou tous deux strictement positifs, ou tous deux strictement négatifs.

Démonstration.
Il existe $W \in \mathcal{V}(a)$ tel que $\forall x \in W \cap A\ |f(x) - g(x)| \leq \frac{1}{2}|g(x)|$.
Soit $x \in W \cap A$. Si $g(x) = 0$, alors $f(x) = 0$.
Si $g(x) \neq 0$, $|\dfrac{f(x)}{g(x)} - 1| \leq \dfrac{1}{2}$, donc $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geq \dfrac{1}{2}$, ce qui prouve que $f(x)$ et $g(x)$ ont le même signe au sens strict. □

Propriété.
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications à valeurs réelles.
$\boxed{\text{Si } f \sim g \text{ et si } g \text{ est strictement positive au voisinage de } a, \text{ alors } f^\alpha(x) \sim g^\alpha(x).}$

Démonstration.
f est aussi strictement positive au voisinage de a, donc f^α est définie au voisinage de a et $\dfrac{f^\alpha(x)}{g^\alpha(x)} \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} 1$, donc $f^\alpha(x) \sim g^\alpha(x)$. □

Propriété. Soient F un espace vectoriel normé, $f : A \longrightarrow F$ et $g : A \longrightarrow F$ deux applications. $\boxed{\text{Si } f \sim g \text{ et si } g(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l, \text{ alors } f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l.}$

Démonstration.

- *Premier cas.* Supposons que $l \in F \setminus \{0\}$. Alors $f \sim g \sim l$, donc par transitivité, $f \sim l$, ce qui montre que $f - l = o(l) = o(\mathbf{O}(1)) = o(1)$, donc $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l$.

- *Deuxième cas.* Supposons que $l = 0$.
Alors $f(x) = \mathbf{O}(g(x))$ et $g(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} 0$, donc $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} 0$.

- *Troisième cas.* Supposons que $F = \mathbb{R}$ et $l = +\infty$. Alors $\dfrac{1}{f(x)} \sim \dfrac{1}{g(x)}$ et $\dfrac{1}{g(x)} \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} 0^+$.

D'après le cas précédent et la propriété de conservation du signe, $\dfrac{1}{f(x)} \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} 0^+$, donc

$f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} +\infty$.

- *Autres cas.* Adaptez ce qui précède lorsque $l = -\infty$ ou $l = \infty$. □

Exemple. Calculer la limite en $\pm\infty$ de $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5x + 1}{(x-1)(3-x)}$.

$f(x) \sim \dfrac{2x^2}{x \times (-x)} = -2$, donc la limite cherchée est -2.

Propriété. Soient F et G deux espaces vectoriels normés, $f : A \longrightarrow F$ et $g : A \longrightarrow G$ deux applications.

La condition $f = \mathbf{O}(g)$ (respectivement $f = o(g)$, $f \sim g$) est vraie si et seulement si elle l'est en remplaçant f et g par des applications équivalentes.

Démonstration.
Soient $\overline{f} : A \longrightarrow F$ et $\overline{g} : A \longrightarrow G$ des applications
respectivement équivalentes à f et g.
Si $f = \mathbf{O}(g)$, $\overline{f} = \mathbf{O}(f) = \mathbf{O}(\mathbf{O}(g)) = \mathbf{O}(g) = \mathbf{O}(\mathbf{O}(\overline{g})) = \mathbf{O}(\overline{g})$,
si $f = o(g)$, $\overline{f} = \mathbf{O}(f) = \mathbf{O}(o(g)) = o(g) = o(\mathbf{O}(\overline{g})) = o(\overline{g})$,
et si $f \sim g$, la transitivité montre que $\overline{f} \sim \overline{g}$.
Les réciproques s'obtiennent en intervertissant les rôles joués par f et $\overline{f}$ et par g et $\overline{g}$.
□

Propriété. (Hors programme) On suppose que f et g sont à valeurs réelles strictement positives. Si $g(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l \in \overline{\mathbb{R}}_+ \setminus \{1\}$ et si $f(x) \sim g(x)$, alors $\ln(f(x)) \sim \ln(g(x))$.

Lorsque $g(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} 1$, alors $\ln(g(x)) \sim g(x) - 1$.

Démonstration.
$\ln(f(x)) = \ln\left(g(x)\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \ln(g(x)) + o(1)$, car $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} 1$.
Or, en convenant que $\ln(+\infty) = +\infty$ et que $\ln(0) = -\infty$, $\ln(g(x)) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} \ln(l) \neq 0$, donc
$\ln(f(x)) = \ln(g(x)) + o(\ln(g(x))) \sim \ln(g(x))$. □

Remarque. Si $f(x) = 1 - x$ et $g(x) = 1 - x^2$, lorsque x est au voisinage de 0, $f(x) \sim g(x)$, mais $\ln(f(x)) \not\sim \ln(g(x))$.

Exemple. Au voisinage de $+\infty$, $\ln(t + \sqrt{1 + t^2}) \sim \ln(t)$.

Démonstration.
$\sqrt{t^2 + 1} \sim t$, donc $t + \sqrt{1 + t^2} = t + (t + o(t)) \sim 2t \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \neq 1$,
donc $\ln(t + \sqrt{1 + t^2}) \sim \ln(2t) = \ln(2) + \ln(t) \sim \ln(t)$. □

Propriété. Changement de variable.
Soient F un second $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, $B \subset F$ et $b \in F \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$. On suppose que tout voisinage de b rencontre B.

Soit $\varphi : B \longrightarrow A$ une application telle que $\boxed{\varphi(t) \underset{\substack{t \to b \\ t \in B}}{\longrightarrow} a}$.

Soient $f : A \longrightarrow G$ et $g : A \longrightarrow H$.

Si $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\sim} g(x)$ (respectivement : $f(x) = \mathbf{O}(g(x))$, $f(x) = o(g(x))$), alors $f\circ\varphi(t) \underset{\substack{t\to b\\ t\in B}}{\sim} g\circ\varphi(t)$ (respectivement : $f\circ\varphi(t) = \mathbf{O}(g\circ\varphi(t))$, $f\circ\varphi(t) = o(g\circ\varphi(t))$).

Démonstration.

- Supposons que $f(x) = \mathbf{O}(g(x))$.

Ainsi, il existe $C > 0$ et $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que, $\forall x \in V \cap A$ $\|f(x)\| \leq C\|g(x)\|$.
Or $\varphi(t) \underset{\substack{t\to b\\ t\in B}}{\longrightarrow} a$, donc il existe $W \in \mathcal{V}(b)$ tel que $\varphi(W \cap B) \subset V$.
Soit $t \in W \cap B$. $\varphi(t) \in V \cap A$, donc $\|f(\varphi(t))\| \leq C\|g(\varphi(t))\|$,
ce qui prouve que $f\circ\varphi(t) = \mathbf{O}(g\circ\varphi(t))$.

- Supposons que $f(x) = o(g(x))$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que, $\forall x \in V \cap A$ $\|f(x)\| \leq \varepsilon\|g(x)\|$.
Or $\varphi(t) \underset{\substack{t\to b\\ t\in B}}{\longrightarrow} a$, donc il existe $W \in \mathcal{V}(b)$ tel que $\varphi(W \cap B) \subset V$.
Soit $t \in W \cap B$. $\varphi(t) \in V \cap A$, donc $\|f(\varphi(t))\| \leq \varepsilon\|g(\varphi(t))\|$,
ce qui prouve que $f\circ\varphi(t) = o(g\circ\varphi(t))$.

- Supposons que $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\sim} g(x)$. Alors $f(x) - g(x) = o(g(x))$,

donc $f(\varphi(t)) - g(\varphi(t)) = o(g(\varphi(t)))$, ce qui prouve que $f\circ\varphi(t) \underset{\substack{t\to b\\ t\in B}}{\sim} g\circ\varphi(t)$. $\square$

Exemple. Lorsque t tend vers 0 par valeurs positives,
$\ln\cos\sqrt{t} = \ln(1 + (\cos\sqrt{t} - 1)) = \ln(1 + (-\frac{t}{2} + o(t))) \sim -\frac{t}{2} + o(t) \sim -\frac{t}{2}$.

3.3 Défauts de stabilité de la relation d'équivalence

Remarque. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications à valeurs réelles. $e^{f(x)} \sim e^{g(x)} \iff (f-g)(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, avec $f(t) = t^2 + t$ et $g(t) = t^2$, au voisinage de $+\infty$, $f(t) \sim g(t)$, mais $e^{f(t)} \not\sim e^{g(t)}$.
Ainsi, en général, $\boxed{\text{si } f(x) \sim g(x),\ \varphi(f(x)) \not\sim \varphi(g(x))}$. L'équivalence de fonctions au voisinage d'un point n'est pas stable par composition à gauche. On vient de voir qu'elle est stable par composition à droite car cela correspond à un changement de variable.

Remarque. $t^2 \underset{t\to+\infty}{\sim} t^2 + 2t$ et $-t^2 + 1 \underset{t\to+\infty}{\sim} -t^2$, mais si l'on somme ces relations, $(t^2) + (-t^2 + 1) = 1 \underset{t\to+\infty}{\not\sim} (t^2 + 2t) - t^2 = 2t$.
L'équivalence de fonctions au voisinage d'un point est stable pour le produit, mais elle ne l'est pas pour la somme. Ainsi, même si elle permet parfois des raisonnements rapides, l'équivalence de fonctions au voisinage d'un point ne fonctionne pas toujours très bien et il est souvent nécessaire de "revenir aux petits o" pour mener les calculs, en utilisant la définition de l'équivalence : $f \sim g \iff f - g = o(g)$.

Remarque. Le raisonnement "au voisinage de 0, $\sin t \sim t - \dfrac{t^3}{6} \sim t + t^2$, donc $\sin t - t \sim t^2$" n'est pas valable car il utilise la stabilité de l'addition, qui est fausse.

Ainsi, dans l'écriture $\sin t \sim t - \frac{t^3}{6}$, le terme $\frac{t^3}{6}$ n'est pas pertinent car il est négligeable devant le premier terme t. C'est pourquoi si vous donnez comme résultat $\sin t \sim t - \frac{t^3}{6}$, vous ne commettez pas d'erreurs (elles ne sont que potentielles), mais vous montrez que vous ne maîtrisez pas la notion d'équivalence de fonctions.

Remarque. Elever un équivalent à une puissance qui dépend de la variable n'est pas autorisé. Par exemple, au voisinage de $+\infty$, $1 + \frac{1}{n} \sim 1$, mais $(1 + \frac{1}{n})^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e$, donc $(1 + \frac{1}{n})^n \not\sim 1$.
De la même façon, dans le cadre des suites, faire le produit de n équivalents lorsque n tend vers l'infini n'est pas autorisé.

3.4 Résumons : quelques méthodes de calculs d'équivalents

Quelques méthodes de calculs d'équivalents :

◇ Si $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l \in E$, avec $l \neq 0$, alors $x_n \sim l$.

◇ Si $x_n = a_n b_n$, chercher des équivalents de a_n et de b_n et en faire le produit.

◇ Si $x_n = \frac{a_n}{b_n}$, chercher des équivalents de a_n et de b_n et en faire le quotient.

◇ Si $x_n = a_n + b_n$, regarder si $a_n = o(b_n)$, auquel cas $x_n \sim b_n$, ou bien si $b_n = o(a_n)$, auquel cas $x_n \sim a_n$.

Exemple. Donner un équivalent simple de $f(x) = \sin x + \sqrt{\tan x}$ au voisinage de 0.
$\sin x \sim x = o(\sqrt{x}) = o(\sqrt{\tan x})$ car $\tan x \sim x$, donc $f(x) \sim \sqrt{\tan x} \sim \sqrt{x}$.

Exemple. Donner un équivalent simple de $f(x) = \sin(2x) - \sin x$ au voisinage de 0.
$f(x) = 2x + o(x) - (x + o(x)) = x + o(x) \sim x$.

Exemple.
Donner un équivalent simple de $f(x) = \ln(1 - x) + e^x - 1$ au voisinage de 0.
$f(x) = (-x + o(x)) + (1 + x + o(x)) - 1 = o(x)$, ce qui ne permet pas de conclure. Mais,
$f(x) = (-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)) + (1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)) - 1 = -\frac{x^3}{6} + o(x^3) \sim -\frac{x^3}{6}$.

4 Les développements limités.

Dans ce paragraphe, on suppose que $E = \mathbb{K}$.

4.1 Définitions

Définition. Soient $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$ une application et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un développement limité au voisinage de a à l'ordre n (ou en $o(x^n)$) si et seulement s'il existe $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $f(a+x) \underset{x \to 0}{=} P(x) + o(x^n)$.

Si $P(X) = \sum_{k=m}^{n} a_k X^k$ avec $a_m \neq 0$, alors $f(x) \underset{x \to a}{\sim} a_m (x-a)^m$. On dit que $a_m(x-a)^m$ est la partie principale de f au voisinage de a.

Remarque. Quitte à utiliser la propriété de changement variable, on peut se limiter au cas où $a = 0$. Par exemple, si $a \in \mathbb{K}$, on peut poser $t = a - x$ et si $a = +\infty$, on peut poser $t = \frac{1}{x}$ ou bien $t = e^{-x}$.
Pour toute la suite de ce paragraphe, on supposera donc que $a = 0$ et que 0 est un point d'accumulation de A.

Définition. développements limités au sens fort.
Avec les notations précédentes, on dit que f admet un développement limité au sens fort au voisinage de 0 à l'ordre n (ou en $\mathbf{O}(x^{n+1})$) si et seulement s'il existe $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $f(x) = P(x) + \mathbf{O}(x^{n+1})$.
Les propriétés qui suivent sont valables pour les développements limités au sens fort ou au sens faible, mais nous ne les énoncerons que dans le cas du sens faible.

Propriété. unicité du développement limité.
Avec les notations précédentes, s'il existe $(P, Q) \in \mathbb{K}_n[X]^2$ tel que
$f(x) = P(x) + o(x^n) = Q(x) + o(x^n)$, alors $P = Q$.

Remarque. Le formulaire qui récapitule les développements limités usuels est à connaître. Ces formules s'obtiennent toutes à l'aide de la formule de Taylor-Young ou du théorème d'intégration d'un développement limité que nous verrons plus loin.

Propriété. Développements limités tronqués.
Soient $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$ une application et $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq n$. On suppose que f admet un développement limité en $o(x^n)$. Alors f admet un développement limité en $o(x^p)$.

De plus, si $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$, alors $f(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k + o(x^p)$.
On dit que l'on a tronqué le développement limité de f à l'ordre p.

Remarque. f admet un développement limité à l'ordre 0 si et seulement s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \underset{\substack{x \to 0 \\ x \in A}}{\longrightarrow} l$. Dans ce cas, $f(x) = l + o(1)$.

Propriété. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$ une application admettant un développement limité en $o(x^n)$ de la forme $f(x) = P(x) + o(x^n)$.
Si f est paire, P est pair, donc P ne contient que des monômes de degrés pairs.
De même, si f est impaire, P est impair, donc P ne contient que des monômes de degrés impairs.

La suite de ce paragraphe fournit des moyens performants pour calculer le développement limité d'une fonction. Ainsi, pour calculer la limite d'une fonction en un point dans le cas d'une forme indéterminée, le plus souvent, on recherche un développement limité de cette fonction à l'ordre 0.

4.2 Opérations sur les développements limités

Propriété. Addition de développements limités.
Soient $n \in \mathbb{N}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : A \longrightarrow \mathbb{K}$ des applications admettant un développement limité en $o(x^n)$ de la forme $f(x) = P(x)+o(x^n)$ et $g(x) = Q(x)+o(x^n)$.
Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $\alpha f + \beta g$ admet le développement limité en $o(x^n)$ suivant :
$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha P(x) + \beta Q(x) + o(x^n)$.

Exemple. $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ et $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, donc
$\sin(x) + \cos(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.

Propriété. Multiplication de développements limités.
Soient $n \in \mathbb{N}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : A \longrightarrow \mathbb{K}$ des applications admettant un développement limité en $o(x^n)$ de la forme $f(x) = P(x)+o(x^n)$ et $g(x) = Q(x)+o(x^n)$.
Alors fg admet le développement limité en $o(x^n)$ suivant : $(fg)(x) = R(x) + o(x^n)$, où $R(x)$ est obtenu en tronquant le polynôme PQ à l'ordre n.

Exemple. Développement limité de $e^x \ln(1 + x)$ à l'ordre 4.

Résolution.
$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$ et $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, donc
$e^x \ln(1+x) = x(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3))(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)) = x(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^3))$,
ce qui prouve que $e^x \ln(1 + x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$.

Remarque. Dans le calcul précédent, la mise en facteur de x dans le développement limité de $\ln(1 + x)$ permet d'éviter de développer e^x jusqu'à l'ordre 4.
Plus généralement, lors d'un calcul de développement limité,
une bonne habitude consiste à factoriser tout développement limité intermédiaire

de la forme $\sum_{k=m}^{n} a_k x^k + o(x^n)$ sous la forme, dite normalisée suivante :

$$a_m x^m \left(1 + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{a_{k+m}}{a_m} x^k + o(x^{n-m})\right).$$

Si l'on peut prévoir avant le calcul explicite les factorisations qui auront lieu, on peut optimiser les ordres auxquels il faut développer les fonctions élémentaires qui composent la fonction globale à développer.

Exemple.
Développement limité de $f(x) = (ch(x) - \cos(x))(sh(x) - \sin(x))^2$ à l'ordre 11.

Résolution. Le développement limité de $ch(x) - \cos(x)$ permet la mise en facteur de x^2 et celui de $sh(x) - \sin(x)$ permet la mise en facteur de x^3. Or
$(1)\ :\ f(x) = x^8 \dfrac{ch(x) - \cos(x)}{x^2} \left(\dfrac{sh(x) - \sin(x)}{x^3}\right)^2$, donc il suffit de développer
$\dfrac{ch(x) - \cos(x)}{x^2}$ et $\dfrac{sh(x) - \sin(x)}{x^3}$ à l'ordre 3.
$ch(x) - \cos(x) = x^2 + o(x^5) = x^2(1 + o(x^3))$ et
$sh(x) - \sin(x) = \dfrac{x^3}{3} + o(x^6) = \dfrac{x^3}{3}(1 + o(x^3))$, donc
$(ch(x) - \cos(x))(sh(x) - \sin(x))^2 = \dfrac{x^8}{9}(1 + o(x^3))^3 = \dfrac{x^8}{9} + o(x^{11})$.
Sur une copie, seuls (1) et les trois lignes précédentes sont nécessaires.

Propriété. Composition de développements limités.
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f\ : A \longrightarrow \mathbb{K}$ une application admettant un développement limité en $o(x^n)$ de la forme $f(x) = P(x) + o(x^n)$.
Soit $B \subset \mathbb{K}$ tel que 0 est un point d'accumulation de B et soit $g\ : B \longrightarrow A$ une application admettant un développement limité en $o(t^n)$ de la forme $g(t) = Q(t) + o(t^n)$, avec $Q(0) = 0$.
Alors $f \circ g$ admet au voisinage de 0 le développement limité à l'ordre n suivant :
$f \circ g(t) = R(t) + o(t^n)$, où $R(t)$ est obtenu en tronquant le polynôme $P \circ Q$ à l'ordre n.

Exemple. Développement limité à l'ordre 2 de $f(x) = e^{(\cos\sqrt{x})}$.

Résolution. $\cos\sqrt{x} = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{24} + o(x^2) = 1 + u$, où $u = -\dfrac{x}{2}(1 - \dfrac{x}{12} + o(x))$,
donc $f(x) = ee^u = e(1 + u + o(u)) = e(1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{24} + o(x^2))$.
Le calcul précédent est **faux** car lorsque l'on substitue formellement u par
$-\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{24} + o(x^2)$ dans l'expression $e^u = 1 + u + o(u)$, on obtient
$e^u = 1 + \left(-\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{24} + o(x^2)\right) + o\left(-\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{24} + o(x^2)\right)$, or $-\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{24} + o(x^2) \sim -\dfrac{x}{2}$,
donc $o\left(-\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{24} + o(x^2)\right) = o(x)$ et on en déduit seulement que $e^u = 1 - \dfrac{x}{2} + o(x)$,

ce qui n'est pas suffisant.
En fait, $e^u = 1+u+\frac{u^2}{2}+o(u^2)$ et $u^2 = \frac{x^2}{4}(1+o(1))$, donc $f(x) = e(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2))$.

Exemple.
Développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 8 de $f(x) = \ln(2+x^2\sin(x))$.

Résolution. $f(x) = \ln(2) + \ln(1+\frac{x^2\sin(x)}{2}) = \ln(2) + \ln(1+u)$, où $u = \frac{x^2\sin(x)}{2}$.
Tentons d'évaluer à priori les ordres auxquels il faut développer les fonctions sin et ln pour obtenir en fin de calculs un développement de f à l'ordre 8.
Le développement de $u = \frac{x^2\sin(x)}{2}$ permet une mise en facteur de x^3, en écrivant $u = \frac{x^3}{2}\frac{\sin x}{x}$. Ainsi, dans le développement de $\ln(1+u)$, les termes en u et u^2 sont à évaluer, mais les termes suivant permettent une factorisation de x^9 et n'interviennent donc pas dans le résultat final. Il est ainsi suffisant de développer $\ln(1+u)$ à l'ordre 2, mais si l'on écrit $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$, après substitution par $u = \frac{x^3}{2}\frac{\sin x}{x}$, il restera un $o(x^6)$ et non un $o(x^8)$. C'est pourquoi il est utile ici de faire un développement limité au sens fort, c'est-à-dire d'écrire $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \mathbf{O}(u^3)$. En effet, lors de la substitution, le $\mathbf{O}(u^3)$ deviendra un $\mathbf{O}(x^9) = o(x^8)$.
En résumé, il faut développer ln à l'ordre 2 au sens fort et sin à l'ordre 6.
$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \mathbf{O}(u^3)$. Et $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$, donc

$$\begin{aligned} \frac{x^2\sin(x)}{2} &= \tfrac{x^3}{2}(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^5)), \text{ et} \\ \left(\frac{x^2\sin(x)}{2}\right)^2 &= \tfrac{x^6}{4}(1-\frac{x^2}{3}+o(x^2)), \end{aligned}$$

donc $f(x) = \ln(2) + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} - \frac{x^6}{8} + \frac{x^7}{240} + \frac{x^8}{24} + o(x^8)$.

Exemple. Montrez que $\varphi\ :\ x \longmapsto \frac{1-\cos(x)}{\tan^2(x)}$ se prolonge par continuité en 0 et donnez un développement limité de φ au voisinage de 0 à l'ordre 3.

Résolution.

$$\begin{aligned} \cos^2(x)(1-\cos(x)) &= (1-\frac{x^2}{2}+o(x^3))^2(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^5)) \\ &= \tfrac{x^2}{2}(1-x^2+o(x^3))(1-\frac{x^2}{12}+o(x^3)), \end{aligned}$$

donc $\cos^2(x)(1-\cos(x)) = \frac{x^2}{2}(1-\frac{13x^2}{12}+o(x^3))$.
De plus, $\sin^2(x) = x^2(1-\frac{x^2}{6}+o(x^3))^2 = x^2(1-\frac{x^2}{3}+o(x^3))$.
Ainsi $\varphi(x) = \frac{1}{2}(1-\frac{13x^2}{12}+o(x^3))(1-\frac{x^2}{3}+o(x^3))^{-1}$
Mais $(1+u)^{-1} = 1-u+\mathbf{O}(u^2)$, donc $(1-\frac{x^2}{3}+o(x^3))^{-1} = 1+\frac{x^2}{3}+o(x^3)$.

Ainsi, $\varphi(x) = \frac{1}{2}(1 - \frac{13x^2}{12} + o(x^3))(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^3))$.
Finalement, $f(x) = \frac{1}{2}(1 - \frac{3x^2}{4} + o(x^3)) = \frac{1}{2} - \frac{3x^2}{8} + o(x^3)$.

Exemple. Donnez un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$ de $f\ : x \longmapsto \ln(x\ln(x)+1)$ en $o(\frac{1}{x^2\ln^2(x)})$.

Résolution. $f(x) = \ln\Big(x\ln(x)(1 + \frac{1}{x\ln(x)})\Big) = \ln(x\ln(x)) + \ln\Big(1 + \frac{1}{x\ln(x)}\Big)$, donc $f(x) = \ln(x) + \ln(ln(x)) + \frac{1}{x\ln(x)} - \frac{1}{2x^2\ln^2(x)} + o\Big(\frac{1}{x^2\ln^2(x)}\Big)$.

4.3 Applications

Position de la tangente : un calcul de développement limité permet de positionner le graphe d'une application f par rapport à sa tangente en a, localement en a.
Par exemple avec $f(x) = \ln x$ en $a = 1$, la tangente a pour équation $y = x - 1$, or au voisinage de 1, $f(x) = \ln(1+(x-1)) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2)$, donc le graphe de f est sous sa tangente, tout au moins au voisinage du point de contact.
Avec $f(x) = \tan x$, au voisinage de 0, $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, donc la tangente traverse le graphe de tan en l'origine, et elle est au dessus du graphe lorsque $x > 0$.
Le chapitre à venir sur la convexité permettra de positionner globalement le graphe de f par rapport à ses tangentes.

Détermination des asymptotes obliques : soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie au voisinage de $+\infty$ (ce qui suit fonctionne aussi bien en $-\infty$).
Le graphe de f présente en $+\infty$ une branche infinie si et seulement si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$.
Dans ce cas, f possède en $+\infty$ une asymptote oblique si et seulement si $f(x)$ admet au voisinage de $+\infty$ un développement asymptotique de la forme $f(x) = c_0x + c_1 + o(1)$, avec $c_0 \neq 0$. On peut déterminer c_0 et c_1 par un calcul de développement limité. C'est une seconde méthode de détermination d'une telle asymptote. Si l'on obtient un terme supplémentaire pour ce développement limité, on pourra positionner asymptotiquement le graphe de f par rapport à son asymptote.
Par exemple, prenons $f(x) = x^2\ln(1 + \frac{1}{x})$. Lorsque x tend vers $+\infty$, $f(x) = x^2(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o(\frac{1}{x^3})) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3x} + o(\frac{1}{x})$. Ainsi, le graphe de f possède une asymptote oblique d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ et au voisinage de $+\infty$, le graphe est au dessus de son asymptote.

5 Applications aux séries

Théorème. Sommation des relations de comparaison.
Soient $\sum a_n \in \mathcal{S}(E)$, où E est un banach, et $\sum b_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$.
• On suppose que $\sum b_n$ est convergente.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ (en cas de convergence) et $S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$.
Ce sont les ***restes de Cauchy*** (à l'ordre n) des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$.
◇ Si $a_n = \mathbf{O}(b_n)$ alors $\sum a_n$ converge absolument et $R_n = \mathbf{O}(S_n)$,
◇ Si $a_n = o(b_n)$ alors $\sum a_n$ converge absolument et $R_n = o(S_n)$,
◇ Si $a_n \sim b_n$ (et $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$) alors $\sum a_n$ converge absolument et $R_n \sim S_n$.

• On suppose que $\sum b_n$ est divergente.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.
◇ Si $a_n = \mathbf{O}(b_n)$ alors $A_n = \mathbf{O}(B_n)$,
◇ Si $a_n = o(b_n)$ alors $A_n = o(B_n)$,
◇ Si $a_n \sim b_n$ (et $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$) alors $A_n \sim B_n$.

Démonstration.
• On suppose que $\sum b_n$ est convergente.
◇ Supposons que $a_n = \mathbf{O}(b_n)$. Il existe $C > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ $\|a_n\| \leq C b_n$. Ainsi $\sum a_n$ est absolument convergente.
Soit $n \geq N$. $\|R_n\| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|a_k\| \leq C \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k = C S_n$. Ainsi $R_n = \mathbf{O}(S_n)$.
◇ Supposons que $a_n = o(b_n)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ $\|a_n\| \leq \varepsilon b_n$. Ainsi $\sum a_n$ est absolument convergente.
Soit $n \geq N$. $\|R_n\| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|a_k\| \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k = \varepsilon S_n$. Ainsi $R_n = o(S_n)$.
◇ Supposons que $a_n \sim b_n$. Alors $|a_n| \sim |b_n| = b_n$,
donc $\sum a_n$ est absolument convergente.
$a_n - b_n = o(b_n)$, donc d'après la propriété précédente, $R_n - S_n = o(S_n)$: on a montré que $R_n \sim S_n$.
• On suppose que $\sum b_n$ est divergente.
◇ Supposons que $a_n = \mathbf{O}(b_n)$. Il existe $C > 0$ et $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $\|a_n\| \leq C b_n$.
Soit $n \geq N_1$. $\|A_n\| \leq \sum_{k=0}^{n} \|a_k\| = \sum_{k=0}^{N_1-1} \|a_k\| + \sum_{k=N_1}^{n} \|a_k\| \leq \sum_{k=0}^{N_1-1} \|a_k\| + \sum_{k=N_1}^{n} C b_k$,
donc $\|A_n\| \leq C \sum_{k=0}^{n} b_k + D$ où $D = \sum_{k=0}^{N_1-1} (\|a_k\| - C b_k)$. D est indépendant de n, or $B_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc il existe N_2 tel que pour tout $n \geq N_2$, $D \leq B_n$.

Ainsi, pour tout $n \geq \max(N_1, N_2)$, $\|A_n\| \leq (C+1)B_n$. On a prouvé que $A_n = \mathbf{O}(B_n)$.

◇ Supposons que $a_n = o(b_n)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$ $\|a_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2} b_n$. Soit $n \geq N_1$.

$\|A_n\| \leq \sum_{k=0}^{n} \|a_k\| = \sum_{k=0}^{N_1-1} \|a_k\| + \sum_{k=N_1}^{n} \|a_k\| \leq \sum_{k=0}^{N_1-1} \|a_k\| + \sum_{k=N_1}^{n} \frac{\varepsilon}{2} b_k$,

donc $\|A_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} b_k + D$ où $D = \sum_{k=0}^{N_1-1} (\|a_k\| - \frac{\varepsilon}{2} b_k)$. Or $B_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc il existe N_2 tel que pour tout $n \geq N_2$, $\frac{2D}{\varepsilon} \leq B_n$.

Ainsi, pour tout $n \geq \max(N_1, N_2)$, $\|A_n\| \leq \varepsilon B_n$. On a prouvé que $A_n = o(B_n)$.

◇ Supposons que $a_n \sim b_n$. $a_n - b_n = o(b_n)$, donc d'après la propriété précédente, $A_n - B_n = o(B_n)$, ce qui prouve que $A_n \sim B_n$. □

Remarque. Ce théorème est encore valable lorsque la suite (b_n) est seulement positive à partir d'un certain rang.

Démonstration.

Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $b_n \geq 0$.

◇ En cas de convergence, pour $n \geq n_0$, les restes de Cauchy à l'ordre n de $\sum b_n$ et de $\sum_{n \geq n_0} b_n$ sont égaux, donc la première partie du théorème se généralise.

◇ Supposons maintenant que $\sum b_n$ est divergente. Ainsi, $\sum_{n \geq n_0} b_n$ est une série divergente de réels positifs, donc $\sum_{k=n_0}^{n} b_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On en déduit :

$B_n = \sum_{k=0}^{n_0-1} b_k + \sum_{k=n_0}^{n} b_k \sim \sum_{k=n_0}^{n} b_k$. Ceci permet de généraliser la seconde partie du théorème. □

Remarque. Ce théorème est encore valable lorsque la suite (b_n) est seulement négative à partir d'un certain rang.

Démonstration.

On applique la remarque précédente à la suite $(-b_n)$. □

> **Exercice.** ***Moyenne de Césaro*** :
> Soit (a_n) une suite de complexes telle que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{C}$.
> Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k$. On dit que (b_n) est la suite des ***moyennes de Césaro*** de la suite (a_n).
> Montrer que $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

Solution. $a_n - l = o(1)$ et $\sum 1$ est une série de réels positifs qui diverge grossièrement. Ainsi, d'après le théorème précédent,
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(a_k - l) = o(\sum_{k=0}^{n} 1) = o(n+1)$, donc $(n+1)(b_n - l) = o(n+1)$,
ce qui permet de conclure.

Exercice. Développement asymptotique de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

• $\dfrac{1}{k} \sim \ln(1+\dfrac{1}{k}) = \ln(k+1) - \ln(k)$, donc d'après le théorème de sommation des équivalents, $S_n \sim \ln(n+1) \sim \ln(n)$. On peut écrire $S_n = \ln(n) + o(\ln(n))$.
Recherchons un développement asymptotique plus précis.
• Posons $x_n = S_n - \ln(n)$. Soit $n \geq 2$.
$x_n - x_{n-1} = \dfrac{1}{n} + \ln(1 - \dfrac{1}{n}) = \mathbf{O}(\dfrac{1}{n^2})$, donc la série télescopique $\sum(x_n - x_{n-1})$ converge. Ainsi, il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma$.
On peut écrire : $\boxed{S_n = \ln(n) + \gamma + o(1)}$. γ est appelé la ***constante d'Euler*** (par le calcul numérique, on montre que $\gamma = 0,5772 \pm 10^{-4}$).
• Recherchons un développement asymptotique encore plus précis.
$x_n - x_{n-1} = -\dfrac{1}{2n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})$, donc
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}(x_{k-1} - x_k) \sim \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right).$$
Ainsi $x_n - \gamma \sim \dfrac{1}{2n}$, ce qui montre que $S_n = \ln(n) + \gamma + \dfrac{1}{2n} + o(\dfrac{1}{n})$.
• On pourrait continuer en posant $y_n = S_n - \ln(n) - \gamma - \dfrac{1}{2n}$ et en appliquant le théorème de sommation des équivalents à la série $\sum(y_n - y_{n-1})$.
On obtient que $S_n = \ln(n) + \gamma + \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{12n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})$.

méthode

• L'exercice précédent utilise la méthode suivante : pour étudier la série $\sum f(n)$, on cherche un équivalent de $f(n)$ sous forme télescopique. En effet, si $f(n) \sim F(n+1) - F(n)$, et si l'on est dans le cadre des séries de réels positifs, $\sum f(n)$ à même nature que la suite $(F(n))$ et le théorème de sommation des équivalents fournit une information intéressante.
• Supposons que f est continue et notons F une primitive de f.
D'après la formule de Rolle (cf un peu plus loin), pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $c_n \in]n, n+1[$ tel que $F(n+1) - F(n) = F'(c_n) = f(c_n)$.
Pour de “bonnes” fonctions f (cf les exemples qui suivent), on peut ensuite montrer que $f(c_n) \sim f(n)$. Ainsi, en choisissant pour F une primitive de f, on peut espérer montrer la relation $f(n) \sim F(n+1) - F(n)$. Cependant, aucun théorème général n'est donné à ce sujet.

Exercice. Etude des séries de Bertrand de la forme $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$, où $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.
Lorsque $\alpha \neq 1$, on a déjà vu comment étudier cette série. Supposons maintenant que $\alpha = 1$. Nous allons pour ce cas limite présenter une seconde méthode :
◇ On suppose d'abord que $\beta \neq 1$.
Notons $\begin{array}{cccc} f: & [2,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x\ln^\beta(x)} \end{array}$. Une primitive de f est
$F\ :\ x \longmapsto \frac{1}{1-\beta}\ln^{1-\beta}(x)$.
D'après la formule de Rolle, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $c_n \in]n, n+1[$ tel que $F(n+1) - F(n) = F'(c_n) = f(c_n)$.
Au voisinage de $+\infty$, $c_n \sim n$, donc $\frac{\ln(c_n)}{\ln(n)} = \frac{\ln(\frac{c_n}{n})}{\ln(n)} + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Ainsi, $\ln(c_n) \sim \ln(n)$. On en déduit : $f(c_n) \sim f(n)$.
Ainsi, $\frac{1}{1-\beta}(\ln^{1-\beta}(n+1) - \ln^{1-\beta}(n)) \sim \frac{1}{n\ln^\beta(n)}$, donc $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln^\beta n}$ a même nature que la série télescopique $\sum_{n\geq 1}(\ln^{1-\beta}(n+1) - \ln^{1-\beta}(n))$.
On en déduit que, si $\beta > 1$, $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln^\beta n}$ converge et si $\beta < 1$, la série diverge.
◇ On suppose maintenant que $\beta = 1$,
Notons $\begin{array}{cccc} f: & [2,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x\ln(x)} \end{array}$. Une primitive de f est $F\ :\ x \longmapsto \ln(\ln(x))$.
D'après la formule de Rolle, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $c_n \in]n, n+1[$ tel que $F(n+1) - F(n) = F'(c_n) = f(c_n)$.
Au voisinage de $+\infty$, on a encore $c_n \sim n$ puis $\ln(c_n) \sim \ln(n)$, donc $f(c_n) \sim f(n)$.
Ainsi, $\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)) \sim \frac{1}{n\ln(n)}$, donc $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)}$ a même nature que $\sum[\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n))]$ qui diverge.
• En conclusion, la série de Bertrand $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).