

# DS 6

Les calculatrices sont interdites.

## Exercice

Résoudre l'équation (E) :  $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = e^{-2t} \ln(t)$  .

## Problème : Calculs de sommes de séries

On rappelle que, lorsque  $n$  et  $k$  sont deux entiers tels que  $0 \leq k \leq n$ ,  $\binom{n}{k}$  désigne le nombre de parties de  $\{1, \dots, n\}$  possédant  $k$  éléments.

Dans tout ce problème,  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  désigne une suite de complexes.  
On lui associe la suite  $a^* = (a_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k.$$

L'objet des parties I à III est de comparer les propriétés des séries  $\sum_{n \geq 0} a_n$  et  $\sum_{n \geq 0} a_n^*$ .

Les parties IV et V s'intéressent à des séries entières.

### Partie I : deux exemples.

1°) **Cas d'une suite constante** : Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

On suppose que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = \alpha$ .

Déterminer les natures des séries  $\sum a_n$  et  $\sum a_n^*$ .

2°) **Cas d'une suite géométrique** : Soit  $z \in \mathbb{C}$ .

On suppose que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = z^n$ .

- Préciser en fonction de  $z$  les natures des séries  $\sum a_n$  et  $\sum a_n^*$  et, en cas de convergence, calculer leurs sommes.
- La convergence de  $\sum a_n^*$  implique-t-elle celle de  $\sum a_n$  ?

- La convergence de  $\sum a_n$  implique-t-elle celle de  $\sum a_n^*$  ?
- Lorsque  $z = e^{i\theta}$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$ , en cas de convergence, calculer les parties réelles et imaginaires de  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$ .

## Partie II : Comparaison entre $(a_n)$ et $(a_n^*)$ .

3°) Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , montrer que  $\frac{1}{2^n} \binom{n}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

4°) On suppose que  $a_n$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

— Quel résultat du cours permet d'affirmer qu'il existe  $M \in \mathbb{R}_+^*$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|a_n| \leq M$  ?

— Montrer que, pour tout  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,

$$|a_n^*| \leq \frac{M}{2^n} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{n}{k} + \frac{1}{2^n} \sum_{k=N}^n \binom{n}{k} \varepsilon.$$

— En déduire que  $a_n^*$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

5°) Soit  $\ell \in \mathbb{C}$ . On suppose que  $a_n$  tend vers  $\ell$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Quelle est la limite de  $a_n^*$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ?

6°) La convergence de la suite  $(a_n)$  est-elle équivalente à la convergence de la suite  $(a_n^*)$  ?

## Partie III : Comparaison entre $\sum a_n$ et $\sum a_n^*$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$  et  $T_n = \sum_{k=0}^n a_k^*$ .

7°) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} S_k$ .

8°) On suppose que la série  $\sum a_n$  est convergente. Montrer que la série  $\sum a_n^*$  est convergente et exprimer la somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$  en fonction de la somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ .

## Partie IV : Rayon de convergence d'une série entière.

La série entière associée à la suite  $(a_n)$  est l'application  $z \mapsto \sum a_n z^n$ , de  $\mathbb{C}$  dans l'ensemble des séries de complexes.

9°) Soit  $\rho \in \mathbb{R}_+^*$  tel que la suite  $(a_n \rho^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée.

Montrer que, pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < \rho$ , la série  $\sum a_n z^n$  est convergente.

On note  $A$  l'ensemble des  $\rho \in \mathbb{R}_+$  tel que la suite  $(a_n \rho^n)$  est bornée.  
On pose  $R = \sup(A)$  avec  $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ .

10°) Soit  $z \in \mathbb{C}$ .

Lorsque  $|z| < R$ , montrer que  $\sum a_n z^n$  est absolument convergente.

Lorsque  $|z| > R$ , montrer que la suite  $(a_n z^n)$  n'est pas bornée.

11°) Montrer qu'il existe un unique  $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  tel que, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , si  $|z| < R$  alors  $\sum a_n z^n$  converge et si  $|z| > R$  alors  $\sum a_n z^n$  diverge.

On dit que  $R$  est le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n z^n$ .

12°) On suppose qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $a_n \neq 0$ .

On suppose également qu'il existe  $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  tel que  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ .

Montrer que le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n z^n$  est égal à  $\frac{1}{\ell}$  en convenant que  $\frac{1}{+\infty} = 0$  et que  $\frac{1}{0} = +\infty$ .

13°) Déterminer les rayons de convergence des séries entières  $\sum z^n$  et  $\sum \frac{z^n}{(n+1)!}$ .

Pour toute la suite de ce problème, on pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sigma_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

En particulier,  $\sigma_0 = 0$ .

14°) Montrer qu'il existe  $\gamma \in \mathbb{R}$  tel que, lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $\sigma_n = \ln n + \gamma + o(1)$ .

En déduire la valeur de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ .

15°) Déterminer les rayons de convergence des séries entières  $\sum \frac{\sigma_n z^n}{n!}$  et  $\sum \sigma_n z^n$ .

## Partie V : Exemples d'études de séries entières

Lorsque  $\sum a_n z^n$  est une série entière de rayon de convergence  $R$  avec  $0 < R \leq +\infty$ , on admettra que l'application  $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$  est de classe  $C^\infty$  sur l'intervalle  $] -R, R[$

et que, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , pour tout  $t \in ] -R, R[$ ,  $\frac{d^p}{dt^p} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d^p}{dt^p} (a_n t^n)$ .

On admettra également que pour tout  $x \in ] -R, R[$ ,  $\int_0^x \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_0^x a_n t^n dt \right)$ .

16°) Avec ces notations, on suppose que  $R > 0$

et on pose  $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  pour tout  $x \in ] -R, R[$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , exprimer  $h^{(n)}(0)$  en fonction de  $a_n$ .

Pour  $x$  réel, lorsque cela a du sens, on pose :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_n x^n}{n!} \quad \text{et} \quad \phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n x^n.$$

**17°)** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , calculer  $f(x)$ .

**18°)** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $F(x) = \int_0^x e^{-t} f(t) dt$ .

Déterminer une suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de complexes telle que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ .

**19°)** Exprimer  $g' - g$  en fonction de  $f$ .

En déduire une expression de  $g$  en fonction de  $F$ .

En déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sigma_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ .

**20°)** Préciser l'ensemble de définition de la fonction  $\phi$ , que l'on notera  $\mathcal{D}_\phi$ .

Étudier les variations de  $\phi$  sur  $\mathbb{R}_+ \cap \mathcal{D}_\phi$ .

**21°)** À l'aide de la partie III, calculer  $\phi(\frac{1}{2})$ .