

## DS 6 : Un corrigé

Le barème comporte un total de 46 points.

### Exercice (sur 4 points)

Soit  $y$  une application deux fois dérivable de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}$ .

Notons  $(H) : y'' + 4y' + 4y = 0$ . Il s'agit de l'équation homogène associée à  $(E)$ .

Son polynôme caractéristique est  $\chi(X) = X^2 + 4X + 4 = (X + 2)^2$ ,

donc  $t \mapsto e^{-2t}$  est une solution de  $(H)$  qui ne s'annule jamais.

Conformément au cours, on va résoudre  $(E)$  en posant  $y(t) = \lambda(t)e^{-2t}$ . Ainsi,

$(E) \iff 4\lambda e^{-2t} + 4(\lambda' - 2\lambda)e^{-2t} + e^{-2t}(\lambda'' - 2\lambda' - 2(\lambda' - 2\lambda)) = e^{-2t} \ln(t)$ , donc

$(E) \iff \lambda'' = \ln(t) \iff \exists \alpha \in \mathbb{R}, \lambda' = t \ln(t) - t + \alpha$ .

Par intégration par parties,  $\int t \ln(t) dt = \frac{t^2}{2} \ln(t) - \int \frac{t^2}{2} \frac{dt}{t} = \frac{t^2}{2} \ln(t) - \frac{t^2}{4} + \beta$ ,

donc  $(E) \iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \lambda(t) = \frac{t^2}{2} \ln(t) - \frac{t^2}{4} - \frac{t^2}{2} + \alpha t + \beta$ , puis

$(E) \iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = e^{-2t} \left( \alpha t + \beta + \frac{t^2}{2} \ln(t) - \frac{3t^2}{4} \right)$ .

### Problème : Calculs de sommes de séries

#### Partie I : deux exemples. (sur 6 points)

1°) (sur 1 point) **Cas d'une suite constante :**

Si  $\alpha = 0$ , alors les suites  $(a_n)$  et  $(a_n^*)$  sont identiquement nulles, donc les séries  $\sum a_n$  et  $\sum a_n^*$  sont convergentes.

Supposons maintenant que  $\alpha \neq 0$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , d'après la formule du binôme de

Newton,  $a_n^* = \frac{\alpha}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \frac{\alpha}{2^n} (1+1)^n = \alpha$ .

En particulier, les suites  $(a_n)$  et  $(a_n^*)$  ne convergent pas vers 0, donc les séries  $\sum a_n$  et  $\sum a_n^*$  sont grossièrement divergentes.

**2°) Cas d'une suite géométrique :**

◇ (sur 2 points) D'après le cours, la série géométrique  $\sum a_n = \sum z^n$  converge si et

seulement si  $|z| < 1$  et dans ce cas, 
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \frac{1}{1-z}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , d'après la formule du binôme de Newton,

$a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^n = \frac{(1+z)^n}{2^n}$ . Ainsi,  $(a_n^*)$  est aussi une suite géométrique, mais sa

raison est égale à  $\frac{1+z}{2}$ . La série  $\sum a_n^*$  est donc convergente si et seulement si  $|1+z| < 2$ , c'est-à-dire si et seulement si le complexe  $z$  est dans la boule ouverte de centre  $-1$  et

de rayon 2. Dans ce cas,  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = \frac{1}{1 - \frac{1+z}{2}}$ , donc 
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = \frac{2}{1-z}.$$

◇ (sur 1 point)  $\sum a_n^*$  converge si et seulement si  $z \in B_o(-1, 2)$  (boule ouverte de centre  $-1$  et de rayon 2) et  $\sum a_n$  converge si et seulement si  $z \in B_o(0, 1)$ . Si l'on représente ces deux domaines dans le plan complexe, on voit que  $B_o(0, 1) \subset B_o(-1, 2)$ . On peut le démontrer directement : si  $z \in B_o(0, 1)$ , alors  $|z+1| \leq |z|+1 < 2$ , donc  $z \in B_o(-1, 2)$ .

On en déduit déjà que la convergence de  $\sum a_n$  implique celle de  $\sum a_n^*$ .

De plus, lorsque  $z = -2$ ,  $z \in B_o(-1, 2) \setminus B_o(0, 1)$ , donc  $\sum a_n^*$  converge et  $\sum a_n$  diverge.

Ainsi, la convergence de  $\sum a_n^*$  n'implique pas celle de  $\sum a_n$ .

◇ (sur 2 points) On suppose que  $z = e^{i\theta}$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Ainsi,  $z \in \mathbb{U}$ , or on voit sur une figure que  $\mathbb{U} \cap B_o(-1, 2) = \mathbb{U} \setminus \{1\}$ , donc  $\sum a_n^*$  converge si et seulement si  $e^{i\theta} \neq 1$ , c'est-à-dire si et seulement si  $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ . On peut le démontrer directement, car  $|1 + e^{i\theta}| = |e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}})| = 2|\cos(\frac{\theta}{2})|$ , donc  $e^{i\theta} \in B_o(-1, 2)$ , sauf lorsque  $2|\cos(\frac{\theta}{2})| = 2$ , c'est-à-dire lorsque  $\frac{\theta}{2} \in \pi\mathbb{Z}$ . Pour la suite, on suppose donc que

$\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ . Alors 
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = \frac{2}{1 - e^{i\theta}} = \frac{2}{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}})} = -\frac{2}{e^{i\frac{\theta}{2}}2i \sin(\frac{\theta}{2})} = \frac{i}{\sin(\frac{\theta}{2})} e^{-i\frac{\theta}{2}}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\operatorname{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*\right) = 1} \quad \text{et} \quad \boxed{\operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*\right) = \frac{\cos(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}.$$

**Partie II : Comparaison entre  $(a_n)$  et  $(a_n^*)$ . (sur 7 points)**

**3°) (sur 1 point)**

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Lorsque  $n \geq k$ ,  $\frac{1}{2^n} \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{2^n k!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{2^n k!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ , car

d'après les croissances comparées,  $\frac{n^k}{2^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ .

4°) (sur 4 points)

— La suite  $(a_n)$  est convergente, donc elle est bornée.

Ainsi, il existe  $M \in \mathbb{R}_+^*$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|a_n| \leq M$ .

— Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,  $|a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$  avec  $n \geq N$ . Alors, par inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} |a_n^*| &= \left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k \right| \leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{n}{k} |a_k| + \frac{1}{2^n} \sum_{k=N}^n \binom{n}{k} |a_k| \\ &\leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{n}{k} M + \frac{1}{2^n} \sum_{k=N}^n \binom{n}{k} \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

— Poursuivons : on en déduit que  $|a_n^*| \leq \frac{M}{2^n} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{n}{k} + \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\varepsilon}{2} = b_n + \frac{\varepsilon}{2}$ ,

par la formule du binôme de Newton, en posant  $b_n = \frac{M}{2^n} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{n}{k}$ .

Or d'après la question précédente,  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc il existe  $N' \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq N'$ ,  $b_n \leq \frac{\varepsilon}{2}$ .

Posons  $P = \max(N, N')$  et soit  $n \geq P$ . Alors  $|a_n^*| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ .

Ceci démontre que  $a_n^* \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

5°) (sur 1 point)

Posons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $b_n = a_n - \ell$ . Alors  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc d'après la question

précédente, on a  $b_n^* \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , où  $b_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_k - \ell) = a_n^* - \ell$ .

Ceci démontre bien que  $a_n^* \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ .

6°) (sur 1 point)

D'après la question 2, lorsque, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = z^n$ , où  $z \in \mathbb{C}$ , on a

$a_n^* = \left(\frac{1+z}{2}\right)^n$ . En particulier lorsque  $z = -2$ , la suite géométrique  $(a_n)$  ne converge

pas (car  $|a_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ ) alors que  $a_n^* = \left(\frac{-1}{2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Ainsi, en général, la convergence de la suite  $(a_n)$  n'est pas équivalente à la convergence de la suite  $(a_n^*)$ .

### Partie III : Comparaison entre $\sum a_n$ et $\sum a_n^*$ . (sur 6 points)

7°) (sur 4 points) On procède par récurrence : soit  $n \in \mathbb{N}$ .

Notons  $R(n)$  l'assertion suivante :  $T_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} S_k$ .

Lorsque  $n = 0$ , on calcule  $T_0 = a_0^* = a_0$  et  $\frac{1}{2^0} \sum_{k=0}^0 \binom{0+1}{k+1} S_k = S_0 = a_0$ , d'où  $R(0)$ .

On suppose maintenant que  $R(n)$  est vraie.

$$\text{Alors } T_{n+1} = T_n + a_{n+1}^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} S_k + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a_k.$$

Dans la seconde somme, on pratique une transformation d'Abel :  
en convenant que  $S_{-1} = 0$ ,

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a_k = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} S_k - \sum_{k=-1}^n \binom{n+1}{k+1} S_k,$$

donc  $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a_k = \sum_{k=0}^n \left( \binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{k+1} \right) S_k + S_{n+1}$ . On en déduit que

$$\begin{aligned} 2^{n+1} T_{n+1} &= 2 \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} S_k + \sum_{k=0}^n \left( \binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{k+1} \right) S_k + S_{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^n \left( \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k+1} \right) S_k + S_{n+1}, \end{aligned}$$

donc d'après la formule de Pascal,  $2^{n+1} T_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n+2}{k+1} S_k + S_{n+1}$ , d'où l'on déduit

$$T_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+2}{k+1} S_k, \text{ ce qui prouve } R(n+1) \text{ si l'on suppose } R(n).$$

Le principe de récurrence permet de conclure.

8°) (sur 2 points) Notons  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ . Ainsi,  $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} S$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} S_{k-1}$ , donc si l'on pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$S'_n = S_{n-1}, \text{ en convenant toujours que } S_{-1} = 0, \text{ on obtient } T_n = 2 \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} S'_k.$$

Or  $S'_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} S$ , donc en appliquant la question 5 en remplaçant  $(a_n)$  par  $(S'_n)$ , on obtient

que  $T_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 2S$ . Ceci montre que la série  $\sum a_n^*$  est convergente et que  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ .

## Partie IV : Rayon de convergence d'une série entière. (sur 13,5 points)

9°) (sur 2 points) Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < \rho$ . Par hypothèse, il existe  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|a_n \rho^n| \leq M$ . Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|a_n z^n| = |a_n \rho^n| \left| \frac{z}{\rho} \right|^n \leq M r^n$ , où

$r = \left| \frac{z}{\rho} \right| \in [0, 1[$ . La série géométrique  $\sum r^n$  est convergente, donc d'après le cours, la série  $\sum a_n z^n$  est absolument convergente.

**10°)** (sur 2 points)  $\diamond 0 \in A$ , donc  $A$  est une partie non vide de  $\mathbb{R}_+$ . Elle possède donc bien une borne supérieure dans  $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ .

$\diamond$  Supposons que  $|z| < R$ .

Alors  $|z|$  n'est pas un majorant de  $A$ , donc il existe  $\rho \in A$  tel que  $|z| < \rho$ .

Ceci impose  $\rho > 0$ , donc d'après la question précédente, la série  $\sum a_n z^n$  est absolument convergente.

$\diamond$  Supposons que  $|z| > R$ . Alors  $|z| \notin A$ , donc la suite  $(a_n |z|^n)$  n'est pas bornée, or pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|a_n z^n| = |a_n |z|^n|$ , donc la suite  $(a_n z^n)$  n'est pas bornée.

**11°)** (sur 2 points)

L'existence découle de la question précédente. Il reste à montrer l'unicité.

Soit  $S \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  tel que pour tout complexe  $z$ , si  $|z| < S$ ,  $\sum a_n z^n$  converge et si  $|z| > S$ ,  $\sum a_n z^n$  diverge.

Si  $S < R$ , il existe  $T \in \mathbb{R}$  tel que  $S < T < R$ . Alors  $\sum a_n T^n$  est à la fois convergente et divergente, ce qui est faux. On raisonne de même si  $R < S$ , donc  $S = R$ .

**12°)** (sur 2 points)  $\diamond$  Supposons d'abord que  $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ . Soit  $z \in \mathbb{C}^*$ .

$\frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |z| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l|z|$ , donc d'après le critère de d'Alembert, lorsque  $|z| < \frac{1}{l}$ ,

$l|z| < 1$  et  $\sum a_n z^n$  converge (et c'est encore vrai lorsque  $z = 0$ ), et de même, lorsque  $|z| > \frac{1}{l}$ ,  $l|z| > 1$  et  $\sum a_n z^n$  diverge. Ainsi, d'après la définition du rayon de convergence, ce dernier est bien égal dans ce cas à  $\frac{1}{l}$ .

$\diamond$  Supposons que  $\ell = 0$ . Alors le calcul précédent montre que, pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$ ,  $\frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc d'après le critère de d'Alembert,  $\sum a_n z^n$  converge. Dans ce cas, le rayon de convergence est bien égal à  $+\infty = \frac{1}{0}$ .

$\diamond$  Supposons enfin que  $\ell = +\infty$ . Alors pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$ ,  $\frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  et  $\sum a_n z^n$  diverge. Dans ce cas, le rayon de convergence est bien égal à  $0 = \frac{1}{+\infty}$ .

**13°)** (sur 0,5 point)  $\diamond$  Pour la première série entière,  $a_n = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On peut donc appliquer la question précédente avec  $\ell = 1$  : le rayon de convergence de  $\sum z^n$  est égal à 1.

$\diamond$  Pour la seconde série entière,  $a_n = \frac{1}{(n+1)!}$ . Alors  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc d'après la question précédente, le rayon de convergence de  $\sum \frac{z^n}{(n+1)!}$  est égal à  $+\infty$ .

**14°)**  $\diamond$  (sur 2 points)

Posons  $x_n = \sigma_n - \ln n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$x_n - x_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln(n-1) - \ln n = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Or la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  est

convergente, donc d'après le cours, la série  $\sum (x_n - x_{n-1})$  est aussi convergente, mais cette dernière série est télescopique, donc la suite  $(x_n)$  est convergente, ce qu'il fallait démontrer.

◇ (sur 2 points) La suite  $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$  tend vers 0 en décroissant, donc d'après le théorème des séries alternées spéciales, la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  est bien convergente.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  est donc la limite de  $S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ , or  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{2k-1}}{2k} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{(2k-1)-1}}{2k-1}$ , donc  $S_n = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \left( \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \right) = \sigma_{2n} - \sigma_n$ . Alors d'après le point précédent,  $S_n = (\ln(2n) + \gamma + o(1)) - (\ln n + \gamma + o(1)) = \ln 2 + o(1)$ , ce qui prouve que  $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ln 2$ . On a donc montré que  $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2}$ .

15°) (sur 1 point) En particulier,  $\sigma_n \sim \ln n$ , donc lorsque  $n \geq 1$ , en posant  $a_n = \frac{\sigma_n}{n!}$ ,  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \sim \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \frac{1}{n+1}$ . Or  $\ln(n+1) = \ln n + \ln(1 + \frac{1}{n}) = \ln n + o(1) \sim \ln n$ , donc  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ . Ainsi, le rayon de convergence de  $\sum \frac{\sigma_n z^n}{n!}$  est  $+\infty$ .  
 ◇  $\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n} \sim \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \sim 1$ , donc le rayon de convergence de  $\sum \sigma_n z^n$  est égal à 1.

## Partie V : Exemples d'études de séries entières (sur 9,5 points)

16°) (sur 1,5 point) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . D'après l'introduction de cette partie,  $h$  est  $n$  fois dérivable sur  $] -R, R[$ , et pour tout  $x \in ] -R, R[$ ,

$$h^{(n)}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{d^n}{dx^n} (a_p x^p) = \sum_{p=n}^{+\infty} a_p p(p-1) \cdots (p-n+1) x^{p-n}, \text{ donc pour } x = 0, \text{ on}$$

obtient  $\boxed{h^{(n)}(0) = n! a_n}$ .

17°) (sur 1 point) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . D'après la question 13,  $f(x)$  est bien défini. De plus,

$$xf(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ donc par décalage d'indice (que l'on peut justifier en passant}$$

aux sommes partielles),  $xf(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ , or d'après le cours  $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ ,

donc  $xf(x) = e^x - 1$ . Ainsi, lorsque  $x \neq 0$ ,  $\boxed{f(x) = \frac{e^x - 1}{x}}$  et  $f(0) = 1$ .

18°) (sur 2 points)

Lorsque  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $e^{-x} f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x} = -\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{n!}$ , donc par

décalage d'indice,  $e^{-x}f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+1)!}$ . Cette égalité est encore vraie lorsque  $x = 0$ ,

car  $f(0) = 1$ .

Cette nouvelle série entière converge pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , donc son rayon de convergence est infini. Alors, d'après l'introduction de cette partie, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{(n+1)!} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)!(n+1)}.$$

Un dernier décalage d'indice donne alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{(n)!n}.$$

Ainsi,  $b_0 = 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n!n}.$$

**19°)**  $\diamond$  (sur 1 point) D'après la question 15, le rayon de convergence de  $\sum \frac{\sigma_n z^n}{n!}$  vaut  $+\infty$ , donc d'après les résultats admis par l'énoncé en début de partie,  $g$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . En particulier,  $g'$  est définie sur  $\mathbb{R}$ . De plus, toujours d'après les résultats admis en

début de partie, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\sigma_n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma_n x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sigma_{n+1} x^n}{n!}$ ,

donc  $g'(x) - g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sigma_{n+1} - \sigma_n)x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$ . Ainsi,  $\boxed{g' - g = f}$ .

$\diamond$  (sur 1 point)  $g$  est donc une solution de l'équation différentielle  $(E) : y' - y = f$ , dont l'équation homogène associée est  $(H) : y' - y = 0$ .

Soit  $y$  une application dérivable de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On sait que  $(H) \iff y = Ce^x$ . On fait varier la constante en posant  $y = C(x)e^x$ . Alors d'après le cours,

$(E) \iff C'(x)e^x = f(x) \iff C(x) = F(x) + D$ , donc il existe  $D \in \mathbb{R}$  tel que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g(x) = F(x)e^x + De^x$ . Or  $g(0) = \sigma_0 = 0$  et  $F(0) = 0$ , donc  $D = 0$ . On en déduit que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\boxed{g(x) = e^x F(x)}$ .

$\diamond$  (sur 1 point) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . D'après la question 16,  $g^{(n)}(0) = \sigma_n$ . Par ailleurs, d'après

la formule de Leibniz, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g^{(n)}(x) = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \frac{d^p}{dx^p}(F(x)) \frac{d^{n-p}}{dx^{n-p}}(e^x)$ ,

or toujours d'après la question 15 et d'après la question précédente, pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ ,

$$F^{(p)}(0) = p!b_p = \frac{(-1)^{p-1}}{p} \text{ et } F(0) = 0. \text{ Ainsi, } g^{(n)}(0) = \sum_{p=1}^n \binom{n}{p} \frac{(-1)^{p-1}}{p}.$$

On a donc bien montré que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sigma_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ .

**20°)** (sur 1 point)  $\diamond$  Notons  $\mathcal{D}_\phi$  le domaine de définition de  $\phi$ . Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathcal{D}_\phi$  si et seulement si la série  $\sum \sigma_n x^n$  est convergente.

D'après la question 15,  $] - 1, 1[ \subset \mathcal{D}_\phi \subset [-1, 1]$ .

De plus,  $\sigma_n \sim \ln n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ , donc  $\sum \sigma_n$  et  $\sum (-1)^n \sigma_n$  divergent grossièrement donc  $\boxed{\mathcal{D}_\phi = ]-1, 1[}$ .

◇ D'après l'introduction de cette partie, pour tout  $x \in [0, 1[$ ,  $\phi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \sigma_n x^{n-1} \geq 0$  donc  $\phi$  est croissante sur  $[0, 1[$ .

**21°** (sur 1 point) Si on pose  $a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$  pour  $k \geq 1$  et  $a_0 = 0$ , on a d'après la question 19 :  $\frac{\sigma_n}{2^n} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k = a_n^*$ .

De plus d'après la question 14,  $\sum a_n$  converge et  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ln 2$ . Alors d'après la question 8,  $\sum a_n^*$  est également convergente et  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ . On en déduit que

$$\boxed{\phi\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma_n}{2^n} = 2 \ln(2)}.$$