DM 25
Séries et caractères

Dans tout le problème, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs et N est un entier supérieur ou égal à 2.
L'ensemble des classes d'équivalence modulo N est noté $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.
L'élément générique de cet anneau sera noté $\overline{a}$, où $a \in \mathbb{Z}$.
On note P l'ensemble des éléments de $\{1, \ldots, N-1\}$ qui sont premiers avec N.
L'ensemble des éléments inversibles pour la multiplication de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ est noté $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$.
On rappelle que $\varphi(N)$ représente le cardinal de P : φ est l'indicatrice d'Euler.
Si a divise b dans $\mathbb{Z}$, on notera $a \mid b$.

I Préliminaires

1°) Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites de complexes.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k$ et on convient que $T_{-1} = 0$.
Montrer que, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq m$,

$$\sum_{k=n}^{m} \alpha_k u_k = -u_n T_{n-1} + \sum_{k=n}^{m-1} T_k(u_k - u_{k+1}) + u_m T_m.$$

2°) Soit $x \in [-1, 1]$.
Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \int_0^x \sum_{n=0}^{N} (-t^2)^n \, dt$.
En déduire que $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$.

Pour toute la suite du problème, on suppose fixée une application χ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ qui satisfait les propriétés suivantes :

A. $\chi(0) = 0$ et χ est non identiquement nulle.
B. Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, si a n'est pas premier avec N, $\chi(a) = 0$.
C. Pour tous les entiers relatifs a et b, $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$.
D. χ est N-périodique : $\chi(a + N) = \chi(a),$ pour tout $a \in \mathbb{Z}$.

3°) Montrer que $\chi(1) = 1$.

4°) Montrer qu'en posant, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\widetilde{\chi}(\overline{k}) = \chi(k)$, on définit une application non nulle de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que la restriction $\widetilde{\chi}|_{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*}^{\mathbb{R}^*}$ est un morphisme de groupes.

II Cas particuliers

5°) Lorsque $N = 2$, déterminer χ.

On suppose jusqu'à la fin de cette partie que $N = 4$.

6°) Montrer que $\chi(3)$ ne peut prendre que les valeurs 1 ou -1.

7°) On suppose maintenant que $\chi(3) = -1$.
Montrer la convergence et calculer la valeur de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n}$.

III Convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\chi(n)}{n}$

Dans cette partie, a est un entier supérieur ou égal à 1 et premier avec N.

8°) En considérant le produit $\displaystyle\prod_{k\in P} ak$, montrer que $a^{\varphi(N)} - 1$ est divisible par N.

9°) Montrer que $|\chi(a)| = 1$.

10°) Établir l'identité :

$$\sum_{k=1}^{N-1} \chi(ak) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k).$$

On suppose dorénavant qu'il existe a premier avec N tel que $\chi(a) \neq 1$.

11°) Pour chaque entier naturel n, calculer $\displaystyle\sum_{k=n}^{n+N-1} \chi(k)$.

12°) Montrer, pour tout $m > 0$, l'inégalité

$$\left|\sum_{k=1}^{m} \chi(k)\right| \leq \varphi(N).$$

13°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \sum_{k=1}^{n} \chi(k)$.

Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} T_n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ est absolument convergente.

En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\chi(n)}{n}$ converge.

IV Comportement asymptotique

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $f_n = \sum_{d\,|\,n} \chi(d)$, où, dans la définition de cette somme, d décrit l'ensemble des entiers naturels qui divisent n.

14°) Soient n et m deux entiers strictement positifs, premiers entre eux.
Montrer que $f_{nm} = f_n f_m$.

15°) Soient p un nombre premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Calculer f_{p^α}.

16°) Pour tout entier $n \geq 1$, établir l'encadrement :

$$0 \leq f_n \leq n.$$

17°) Pour tout entier $n \geq 1$, montrer que $f_{n^2} \geq 1$.

18°) Soit $x \in \mathbb{R}$.
Montrer que lorsque $|x| > 1$, la série $\sum_{n\geq 1} f_n x^n$ est divergente.
Montrer que lorsque $|x| < 1$, la série $\sum_{n\geq 1} f_n x^n$ est convergente (on pourra utiliser sans le démontrer que lorsque $\lambda \in [0,1[$, $n\lambda^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc la suite $(n\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée).

Pour tout $x \in]-1,1[$, on note $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n$.

19°) Montrer, pour tout $x \in [\frac{1}{2}, 1[$:

$$f(x) \geq \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}} \lim_{A\to+\infty} \int_{\sqrt{\ln(2)}}^{A} \mathrm{e}^{-u^2}\, du.$$