Mesures et incertitudes

Conformément au programme de CPGE, dans la poursuite de ceux du lycée, les notions présentées se veulent conformes aux règles internationales, définies par le Bureau International des Poids et Mesure dans le document fondamental Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure (souvent cité en tant que « GUM »), téléchargeable sur le site internet www.bipm.org.

La lecture de celui-ci est conseillée, d'autant que ce document de référence est en français. Il est disponible librement sur le site :

https ://www.bipm.org/fr/publications/guides/gum.html

L'évaluation des incertitudes de mesure est toujours un point délicat du travail expérimental. Toutefois, cette difficulté est réelle et intrinsèque à toute mesure, quelle que soit le niveau de l'expérience. L'objectif de ce document est de fournir un cadre unique à nos étudiants pour toutes les expériences rencontrées au niveau enseignement en CPGE.

« Bien que ce Guide fournisse un cadre pour l'estimation de l'incertitude, il ne peut remplacer ni la réflexion critique ni l'honnêteté intellectuelle ni la compétence professionnelle. L'évaluation de l'incertitude n'est jamais une tâche de routine ni une opération purement mathématique ; elle dépend de la connaissance détaillée de la nature du mesurande et du mesurage. La qualité et l'utilité de l'incertitude fournie pour le résultat d'un mesurage dépendent, en fin de compte, de la compréhension, de l'analyse critique et de l'intégrité de [celles et] ceux qui contribuent à son évaluation. »

GUM 2008 (dernière version) - 3.4.8

I Variabilité et incertitude-type

I.1 La variabilité en science expérimentale

Une expérience de mesure en science expérimentale est un processus généralement complexe qui entremêle de très nombreux processus. Cette complexité se traduit systématiquement par une variabilité de la mesure, qui implique que la répétition de l'ensemble de la mesure conduit généralement à une valeur mesurée sensiblement différente de la première. Cette variabilité est naturelle et fait intrinsèquement partie de la mesure. Il ne faut pas chercher à la faire disparaître, bien au contraire, elle renferme généralement une grande richesse d'information sur le processus physique !

Cette variabilité peut provenir de nombreux aspects, dont les principaux sont les suivants :

- le choix de la méthode de mesure. *Par exemple, choisir de mesurer un petit élément à la règle graduée ou au pied à coulisse n'implique pas la même précision*
- aux variations de l'environnement. *Si l'on souhaite mesurer la célérité du son avec un protocole se déroulant sur une journée complète, comme la température de l'air va évoluer au cours du temps, la célérité du son aussi.*
- aux instruments de mesure. *Mesurer une tension avec deux voltmètres semblant identiques amène parfois à une mesure de tension légèrement différente.*
- au processus physique lui-même. *Par exemple, une expérience de mécanique quantique est intrinsèquement variable car la mécanique quantique ne prédit que des lois de probabilité.*
- et surtout, à la personne réalisant l'expérience.

Généralement au niveau scolaire, la personne réalisant l'expérience est la principale cause de variabilité de la mesure. Par ses gestes, ses choix et sa technique, cette personne introduit une variabilité importante. Il est donc totalement naturel que deux personnes réalisant la même expérience, dans les mêmes conditions, avec le même matériel, trouvent des valeurs différentes.

Il est à noter que le but de toute formation expérimentale, de la maternelle jusqu'au plus haut niveau universitaire et professionnel, permet patiemment de faire diminuer cette variabilité. En acquérant chaque année des nouvelles connaissances et de nouvelles compétences, un·e étudiant·e peut donc patiemment réussir à faire diminuer son impact personnel sur la variabilité d'une mesure.

I.2 Définitions et incertitude-type

Commençons par définir quelques notions courantes de métrologie :

- La grandeur que l'on veut mesurer est appelée le **mesurande** ;
- On appelle **mesurage** (mesure) l'ensemble des opérations permettant de déterminer expérimentalement une ou plusieurs valeurs que l'on peut raisonnablement attribuer à une grandeur.

Par exemple, quand on mesure la valeur de la résistance R d'un dipôle passif linéaire, le mesurande est la résistance R de ce dipôle et le mesurage est effectué, par exemple, avec un ohmmètre.

La **valeur vraie** du mesurande est la valeur que l'on obtiendrait si le mesurage était parfait. Un mesurage n'étant jamais parfait, **cette valeur est toujours inconnue**. La valeur vraie est donc inaccessible.

Afin de quantifier nos résultats pour déterminer la valeur de mesurande, on utilise la notion d'incertitude-type.

Définition. La quantification de la variabilité d'une mesure x d'une grandeur est appelée incertitude-type et notée $u(x)$.
Par définition, l'incertitude-type correspond à l'écart-type de la distribution des données issues d'une répétition de la mesure.

Le résultat d'une mesure sera noté par convention

$$\boxed{x \pm u(x)}$$

On fera à ce stade deux remarques :

- pour estimer l'incertitude-type du résultat d'une **unique** mesure, il faut donc répéter un grand nombre de fois le processus de mesure. Cette répétition et les valeurs supplémentaires servent uniquement à estimer la variabilité du processus de mesure.
- l'incertitude-type est l'estimation d'une variabilité qui est unique à chaque processus de mesure. Il est donc naturel que deux personnes réalisant exactement la même expérience aient une variabilité, et donc une incertitude-type, différente.

Incertitude-type relative : On peut définir de plus l'incertitude-type de mesure « relative » la grandeur $u(x)/x$, que l'on donne généralement en pourcentage.

I.3 Interprétation de l'incertitude-type

Revenons à la définition de l'incertitude-type. Soit un ensemble de N mesures notées x_i avec i allant de 1 à N.

On définit **la moyenne** $\overline{x}$ de l'ensemble, qui nous permet de définir l'écart-type, et donc l'incertitude-type, grâce aux relations

$$\overline{x} = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} x_i \qquad \text{et} \qquad u(x) = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{N}-1} \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} (x_i - \overline{x})^2}$$

Il est à noter qu'il n'y a qu'une incertitude-type $u(x)$ pour l'ensemble des mesures x_i, et non pas une pour chacune. En effet, l'incertitude-type caractérise la variabilité d'un processus de mesure, et donc toutes les mesures issues de ce processus ont logiquement la même incertitude-type.

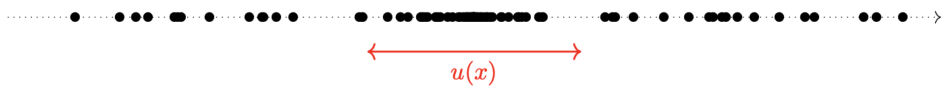

Fig. 1 – Représentation d'une série de 100 mesures d'une grandeur x ainsi que de la largeur de l'incertitude-type de cet ensemble.

La figure 1 représente une distribution de mesures ainsi que l'incertitude-type. On constate qu'en moyenne deux valeurs prises au hasard sont séparées de quelques $u(x)$. Toutefois, on constate aussi que quelques points sont très éloignés des autres. Il ne s'agit pas de points aberrants, mais de valeurs dans des domaines peu fréquents car peu probables mais tout de même possibles.

Propriété. L'incertitude-type permet de quantifier la variabilité d'une mesure. Ainsi, deux mesures x_1 et x_2 issues du même processus sont séparées en moyenne de quelques $u(x)$ par construction de l'incertitude-type en tant qu'écart-type.

I.4 Comparaison de deux mesures

I.4.1 Définition de l'écart normalisé

Pour pouvoir comparer deux mesures entre elles, il faut un critère quantitatif pour indiquer si ces deux mesures sont considérées comme compatibles ou incompatibles. Dans la majorité des cas, on voudra comparer ses valeurs avec une valeur théorique m_{ref} ($u(m_{\text{ref}}) = 0$ en général).

Définition. L'écart normalisé $\mathrm{E_N}$ entre deux processus de mesure donnant les valeurs m_1 et m_2 et d'incertitudes types $u(m_1)$ et $u(m_2)$ est défini par

$$\mathrm{E_N} = \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{u(m_1)^2 + u(m_2)^2}}$$

Par convention, on qualifie souvent deux résultats de compatibles si leur écart normalisé vérifie la propriété $\mathrm{E}_n \leqslant 2$.

> L'écart normalisé s'appelle aussi « z-score ».

Ce seuil à 2 est d'origine historique. On le retrouve dans de nombreux champs scientifiques, comme la médecine, la pharmacie, la biologie, la psychologie, l'économie, l'écologie, etc. Ce seuil peut différer selon le domaine : par exemple pour démontrer l'existence d'une nouvelle particule en physique subatomique, il faut atteindre un seuil de 5.

II Présentation d'un résultat

Il faut maintenant présenter le résultat de la mesure à l'aide des canons en vigueur. Le résultat d'un mesurage doit indiquer la valeur mesurée, l'incertitude-type associée, et toutes les hypothèses sous-jacentes à l'obtention du résultat. Les recommandations internationales stipulent qu'on limite le nombre de chiffres significatifs de l'incertitude à 2. Nous choisissons donc de présenter

- l'incertitude-type arrondie au supérieur **avec deux chiffres significatifs** ;
- la valeur mesurée et l'incertitude-type doivent avoir le même nombre de chiffres après la virgule ;
- si la notation scientifique est privilégiée, la puissance de 10 est identique pour valeur mesurée et l'incertitude-type ;

- l'unité bien évidemment

Voici un exemple d'une mesure de la résistance R d'un conducteur ohmique dont la valeur affichée est $\mathrm{R} = 1{,}036\,454\,38$ kΩ et l'incertitude-type estimée est $\Delta\mathrm{R} = 123{,}334\,236\,6$ Ω. En suivant les règles précédentes,

– l'incertitude-type s'écrit $\Delta\mathrm{R} = 1{,}3 \times 10^2$ Ω.
– Pour mieux comparer R à ΔR, il est préférable d'écrire les résultats en kΩ : $\Delta\mathrm{R} = 0{,}13$ kΩ.
– L'incertitude-type va jusqu'au deuxième chiffre après la virgule donc cela doit être aussi le cas avec R : $\mathrm{R} = 1{,}04$ kΩ.
– Le résultat qui doit être écrit à la fin de l'expérience est

$$\boxed{\mathrm{R} = 1{,}04 \pm 0{,}13\ \mathrm{k\Omega}}$$

III Estimation du résultat d'une mesure et de l'incertitude-type

L'évaluation des incertitudes par des méthodes statistiques est dite de **type A**. Quand la détermination statistique n'est pas possible, on dit que l'évaluation est de **type B**. C'est le cas d'une mesure unique réalisée avec un appareil de classe connue.

III.1 Expériences sans variabilité observée (incertitudes de type B)

Certaines expériences n'ont pas de variabilité observée. Cela signifie qu'en reproduisant la mesure, on retrouve systématiquement le même résultat. C'est par exemple le cas lorsque l'on mesure naïvement la taille d'un objet avec la même règle graduée. Logiquement, reproduire la mesure n'apporte pas d'information.

Cette absence de variabilité observée n'implique pas une absence de variabilité. Cela signifie juste qu'à l'échelle de cette expérience, avec l'appareil de mesure choisi, la variabilité est plus faible que la précision de la mesure.

Ce phénomène n'est pas uniquement lié à l'appareil de mesure. En effet, selon les conditions expérimentales, il n'est parfois pas matériellement possible (ou souhaité) de reproduire le processus de mesure. Dans ce cas, une seule valeur est accessible et il faut tout de même estimer son incertitude-type.

Il faut donc estimer théoriquement la variabilité de la mesure sans l'observer. Nécessairement, cela est possible sous certaines hypothèses qui ne seront pas forcément adaptées à toutes les expériences.

Propriété. Lors d'une mesure sans variabilité observée, on estime la plus petite plage dans laquelle l'expérimentateur est certain de trouver la valeur recherchée. On note $\overline{x}$ la valeur centrale de cette plage et Δ sa demi-largeur. Autrement dit, l'expérimentateur est certain de trouver la valeur recherchée dans l'intervalle $[\overline{x} - \Delta, \overline{x} + \Delta]$. Dans ce cas, le résultat de la mesure est

$$\boxed{\overline{x} \pm u(\overline{x}) \qquad \text{avec} \qquad u(\overline{x}) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}}$$

Comme toute incertitude-type, elle représente l'écart-type de la distribution uniforme des données comprises dans l'intervalle $[\overline{x} - \Delta, \overline{x} + \Delta]$.

Insistons sur trois remarques :

- Le facteur $\sqrt{3}$ est d'origine statistique. Lorsque la distribution est uniforme dans un intervalle donné, le calcul de l'écart-type fait apparaître ce facteur numérique (voir le premier programme python).

- L'intervalle Δ doit être pris le plus faible possible selon les critères personnels de l'expérimentateur et selon les conditions de l'expérience. Il ne doit pas y avoir de règle générale. Par exemple avec une règle graduée au millimètre, si la valeur tombe directement sur une graduation, il est naturel de prendre $\Delta = 0.25$ mm, tandis que si la valeur est entre deux graduations, on prendra plus logiquement $\Delta = 0.5$ mm. Et enfin, un étudiant peu sûr de lui peut choisir de prendre dans le même cas $\Delta = 1$ mm.
- Pour les appareils de mesure numérique, il est nécessaire de consulter la notice de l'appareil. Toutefois, bien souvent, les notices ne précisent pas clairement la nature de la valeur de la précision fournie (est-ce une incertitude-type ? un intervalle ? un écart-type d'une distribution gaussienne ?). Dans ce cas, on suppose que l'incertitude affichée sur la notice est un intervalle Δ de certitude de trouver la mesure.

III.2 Expériences avec variabilité observée (incertitudes de type A)

Lorsque la variabilité des mesures est accessible, il convient de répéter un grand nombre de fois le processus mesure pour estimer l'incertitude-type sur une unique réalisation de la mesure.

Toutefois, comme nous l'avons vu au paragraphe 1.3, certains points de mesure ont statistiquement une chance d'être très éloignés des autres. Pour gagner en précision, nous pouvons utiliser les différents points de mesures effectués pour aller plus loin qu'une simple estimation de l'incertitude-type sur une mesure unique.

Nous changeons donc d'expérience, l'expérience n'est plus « mesurer un point à l'aide d'un protocole » mais « mesurer la moyenne de N points effectués avec le même protocole ». Cette expérience est différente et a donc une incertitude-type différente. L'intérêt de la moyenne est qu'elle va réduire les variabilités.

Pour estimer l'incertitude-type de cette moyenne, il faut par définition reproduire un grand nombre de fois l'expérience et calculer l'écart-type de la distribution obtenue. Or chaque expérience est déjà la reproduction de la mesure unique un grand nombre de fois, on comprend bien que cette opération peut vite être chronophage. Heureusement, il existe une formule mathématique permettant d'estimer cet écart-type.

Propriété. On réalise N fois le même protocole pour obtenir l'ensemble des points expérimentaux $\{x_i\}$. On note l'incertitude-type $u(x)$ de cet ensemble de mesures qui est évaluée en calculant son écart-type. Le résultat de l'expérience est

$$\boxed{\overline{x} \pm u(\overline{x}) \qquad \text{avec } \overline{x} = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} x_i \text{ et } u(\overline{x}) = \frac{u(x)}{\sqrt{\mathrm{N}}} \text{ l'écart-type}}$$

IV Les incertitudes-type composées

Très souvent, la mesure expérimentale n'est pas le résultat recherché de l'expérience. Il faut souvent combiner des mesures entre elles pour obtenir le résultat souhaité.

IV.1 Incertitude-type composées de type somme

Propriété. Supposons que l'on calcule $y(x_1, x_2) = \alpha\, x_1 + \beta\, x_2$. L'incertitude-type de y est alors donnée par

$$\boxed{u(y) = \sqrt{(\alpha\, u(x))^2 + (\beta\, u(y))^2}}$$

Par exemple, la mesure d'une longueur L à la règle se fait à partir de la mesure de deux repères de la règle x_1 et x_2 (avec $x_2 > x_1$). Dans ce cas, $\mathrm{L}(x_1, x_2) = x_2 - x_1$. Chaque repère est associé à deux incertitudes-types, supposées identiques (puisqu'on utilise la même règle) : $u(x_1) = u(x_2)$. La formule de l'incertitude-type composée donne

$$u(\mathrm{L}) = \sqrt{(1 \times u(x_1))^2 + (-1 \times u(x_2))^2} = \sqrt{2\,(u(x_1))^2}$$

donc
$$\boxed{u(\mathrm{L}) = \sqrt{2}\,u(x_1)}$$

> L'incertitude-type d'une somme de deux grandeurs n'est pas la somme de l' incertitude-type de chaque grandeur.

IV.2 Incertitudes-type composées de type produit

Propriété. Supposons que l'on calcule $y(x_1, x_2) = a\,x_1^{\alpha}\,x_2^{\beta}$. L'incertitude-type relative de y est alors donnée par

$$\boxed{\frac{u(y)}{y} = \sqrt{\left(\alpha\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\beta\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}}$$

IV.3 Incertitudes-type composées quelconques

Seules les deux formules précédentes sont à connaître, pour tous les autres cas, nous allons revenir à la définition des incertitudes puis, à l'aide d'une simulation informatique comportant une part d'aléatoire, calculer l'incertitude- type.

IV.3.1 À la main (rarement utilisé)

Soit X une grandeur physique à évaluer résultant de la mesure de n grandeurs expérimentales, notés $\{\mathrm{Y}_1, ..., \mathrm{Y}_n\}$, d'incertitudes-types respectives $\{u(\mathrm{Y}_1), ..., u(\mathrm{Y}_n)\}$. Soit X_0 la valeur réelle de X. Soit $\mathrm{X_m}$ son estimateur donnée par une certaine fonction $f(\mathrm{Y}_1, ..., \mathrm{Y}_n) = \mathrm{X_m}$. Alors l'incertitude-type $u(\mathrm{X})$ sur X_m est donnée par

$$\boxed{u(\mathrm{X}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial \mathrm{Y}_i}\,u(\mathrm{Y}_i)\right)^2}}$$

IV.3.2 Algorithme de Monte-Carlo

Un algorithme utilisant la variabilité d'une mesure pour simuler un calcul d'incertitude fait parti des algorithmes de type Monte-Carlo.

Supposons que l'on cherche à estimer une grandeur y donnée par $y = f(x_1, x_2, ...)$ avec les x_i des données résultants d'une mesure et f une fonction connue. Chaque x_i est caractérisé par sa valeur et son incertitude-type.

La valeur de y est donnée par l'application de la formule. Pour estimer l'incertitude-type, il faut remonter à la variabilité de y, qui est elle-même une conséquence de la variabilité des x_i.

Pour cela, il faut :
- Fixer un nombre N de simulations à réaliser.
- Pour k entre 1 et N, réaliser :
  - un tirage aléatoire pour chaque x_1 ;

  - utiliser les valeurs de ce tirage et la fonction f pour calculer une valeur y_k ;
  - sauvegarder cette y_k.
- l'incertitude-type de y est l'écart-type de la distribution des y_k. La moyenne des y_k permet de retrouver la valeur y.

Le choix de la distribution de probabilité de chaque x_i dépend de plusieurs facteurs expérimentaux. La modélisation de cette distribution peut être délicate. Par exemple, il n'est pas du tout naturel de prendre systématiquement une distribution gaussienne.

En règle général en CPGE, les x_i sont mesurés avec une précision. En dessous de cette précision, l'étudiant est incapable d'accéder à une information sur la distribution de probabilité. On privilégie donc **la distribution uniforme de probabilité**, cohérente avec l'expérience pratique de l'étudiant. Toute autre forme de distribution doit pouvoir être justifiée et argumentée par l'étudiant.