Programme de colle - semaine 1 (16 septembre)

Le cours doit être parfaitement su. La colle commencera par une ou plusieurs questions de cours (listées en fin de programme de colle) au choix du colleur. Une question de cours non travaillée ou un énoncé de cours non su donne une note strictement inférieure à 10.

Chap I - Révisions et compléments d'algèbre

1. Sommes classiques : $\sum_{k=0}^{n} k$, $\sum_{k=0}^{n} k^2$, identités remarquables $a^n - b^n$. Somme géométrique. Utilisation du symbole $\sum$, et $\prod$, changement d'indice, sommes télescopiques.
2. Coefficients binomiaux, propriété de symétrie et relation de Pascal. Notation $n!$. Expression de $\binom{n}{k}$ à l'aide des factorielles. Formule du binôme de Newton.
3. Sur des exemples, calcul de sommes doubles, inversion de l'ordre de sommation (également sur des sommes triangulaires).

Chap III - Trigonométrie

1) Formulaire de trigonométrie concernant les fonctions $\cos$ et $\sin$. Valeurs particulières, arcs associés. Formule d'addition, conséquence $\cos(2a) = ...$, $\sin(2a) = ...$; Formules de linéarisation ;
Formules de transformation (à savoir retrouver à partir des formules d'addition) $\cos a \cos b = ...$, $\sin a \sin b = ...$, $\sin a \cos b = ...$ et $\cos(p) \pm \cos(q)$, $\sin(p) \pm \sin(q)$.
Résolution d'équations $\cos(x) = \cos\theta$ ou avec sinus.
Réduction de $a\cos\theta + b\sin\theta$, et interprétation géométrique. Application à la résolution d'équation $a\cos x + b\sin x = c$ d'inconnue x réel.

2) Définition et étude de la fonction tangente. Formules : $\tan' = 1 + \tan^2 = 1/\cos^2$. Formule d'addition $\tan(a+b)$, $\tan(2a)$. Expression de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ en fonction de $t = \tan(\frac{\theta}{2})$ (à connaître, et à savoir retrouver)

Chap III - Nombres complexes

1 Le corps des nombres complexes

1. *Construction rapide des complexes* ($\mathbb{R}^2$ muni de deux lois addition et multiplication) NON EXIGIBLE. Propriétés algébriques usuelles.
2. Représentation géométrique, plan complexe. **Conjugaison**. Propriétés classiques.
3. **Module.** Propriété classiques. Inégalité triangulaire.
4. **Arguments** a) Groupe multiplicatif $\mathcal{U}$ des nombres complexes de module 1. b) Notation $e^{i\theta}$. c) Arguments d) Forme trigonométrique d'un nombre complexe ; d) Propriétés des arguments, interprétation géométrique. Utilisation des nombres complexes en géométrie : Interprétation du complexe $\frac{c-a}{b-a}$ pour la configuration de trois points $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ d'affixes a, b, c.

2 Applications des complexes à la trigonométrie :

1. Somme de deux complexes de même module : technique de l'angle moitié et interprétation géométrique.
2. Calcul de sommes trigonométriques (exemple $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(kx)$)

N.B. *Le cours n'est pas fini. Sont reportées à la semaine prochaine les notions suivantes :- Linéarisation, -expression de* $\cos(n\theta)$ *et* $\sin(n\theta)$ *comme polynômes en* $\cos\theta$ *et* $\sin\theta$*, équations du second degré, - racines* n*-ièmes d'un nombre complexe, - exponentielle complexe et - écriture des similitudes planes.*

QUESTIONS DE COURS : Les questions de cours relèvent de démonstrations de cours ou de techniques de calcul à maîtriser. Vérifier que les étapes sont bien comprises par les étudiants.

1. Reprise d'exos vus en classe :
   — exprimer $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)$ à l'aide de factorielle et de puissance de 2
   — et/ou calculer $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ en simplifiant $k\binom{n}{k}$ pour $k \geq 1$
   — et/ou Calcul d'une somme double triangulaire (exemple) : $\sum_{0 \leq k \leq \ell \leq n} \binom{\ell}{k}$ ou $\sum_{0 \leq k \leq p \leq n} \frac{(-1)^p}{3^{k+p}}$.
   — et/ou pour $p \leq q$ deux entiers, expression de $f(x) = \sum_{k=p}^{q} (-1)^k x^{2k}$ pour toute valeur du complexe x.

   — Justifier $(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$
2. Tracé du graphe de tangente. Puis on justifie selon la demande du colleur (expression de la dérivée ou position par rapport à la tangente en 0,...)
3. Expression de $\cos(p) + \cos(q)$ (ou des autres) (il n'est pas exigé de savoir par coeur cette formule, mais on attend de savoir la retrouver rapidement à partir des formules d'addition)
   Donner l'expression de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ en fonction de $t = \tan(\theta/2)$ lorsque $\theta \not\equiv 0[\pi]$ et démontrer la réponse
4. Résolution d'équations trigo : $\sin(2x) = \frac{1}{2}$ et $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 1$ (ou toute autre du même genre).
5. *Exercice* Déterminer les complexes z non nuls tels que $z + \frac{1}{z}$ est réel *(pour apprendre à utiliser la conjugaison).*
6. Inégalité triangulaire (pour 2 complexes) avec cas d'égalité *(énoncé et démo).*
7. Démonstration du corollaire : pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\Big||z| - |z'|\Big| \leq |z - z'|$.
8. Soit $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{M}$ trois points distincts du plan d'affixes respectives a, b, z. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\mathrm{Z} = \frac{z-b}{z-a}$ dans chacun des cas suivants : a) les trois points soient alignés, b) ABM soit un triangle équilatéral, c) ABM triangle rectangle et isocèle en M.

N.B. Le vocabulaire : *groupe, élément neutre, loi associative, etc* a pu être évoqué au cours des exemples du cours. Il n'est pas encore exigible des étudiants.

PRÉVISIONS : Suite et fin des nombres complexes. Et éléments de logiques et notations sur les ensembles.