Programme de colle - semaine 2 - 25 septembre

La colle débutera par une ou plusieurs questions de cours citées en fin de programme de colle. Le cours doit être parfaitement su.

Calcul algébrique

Voir semaine 1 : notation $\sum$ et changement d'indices, sommes géométriques, factorisation $a^n - b^n$, coefficient du binôme, formule du binôme de Newton, sommes doubles y compris triangulaires.

Nombres complexes

Cours de la semaine dernière (voir semaine 1) : révision conjugaison, module, arguments ; inégalité triangulaire ; applications à la trigo : technique de l'angle moitié, calcul de $\sum_{0\leq k\leq n} \cos(kx)$
Vu cette semaine : **Linéarisation.**
Expression de $\cos(n\theta)$ **et** $\sin(n\theta)$ **comme polynômes en** $\cos\theta$ **et/ou** $\sin\theta$
Équations polynomiales de degré 2 Racine carrée d'un nombre complexe, résolution d'un trinôme à coefficients complexes. Relations coefficients-racines (pour un polynôme de degré 2) .
Racines n**-ièmes d'un nombre complexe.** Groupe $\mathcal{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité. Description, cardinal. Existence et calcul des racines n-ième d'un complexe non nul.

N.B. Le chapitre Nombres Complexes n'est pas encore fini. Reporté à la semaine prochaine : exponentielle complexe et expression complexes des similitudes directes.

Éléments de logique

Proposition Logique. Négation, conjonction, disjonction, implication, équivalence. Quantificateurs $\forall$ et $\exists$.

QUESTIONS DE COURS :

1. *exo du programme précédent* Résoudre l'équation $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 1$ d'inconnue x dans $\mathbb{R}$ et calcul pour $n \in \mathbb{N}$ de $\sum_{0\leq k\leq p\leq n} \frac{(-1)^p}{3^{k+p}}$
2. Inégalité triangulaire (pour 2 complexes) avec cas d'égalité *(énoncé et démo)*.
3. Démonstration du corollaire : pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\Big||z| - |z'|\Big| \leq |z - z'|$.
4. Calcul pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ de $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$
5. Linéarisation. Exemple linéariser $\cos^3(\theta)$ ou $\sin^3(\theta)\cos(\theta)$ ou au choix du colleur linéarisation de $\cos^{2p}(\theta)$ ou de $\cos^{2p+1}(\theta)$ ou de $\sin^{2p}(\theta)$ ou de $\sin^{2p+1}(\theta)$ (avec $p \in \mathbb{N}$).
6. Exprimer $\cos(n\theta)$ comme un polynôme en $\cos(\theta)$ (on part de la formule de De Moivre) ou $\sin(n\theta)$ comme un polynôme en $\cos\theta$ et $\sin\theta$
7. a) Déterminer les racines carrées de $1 + i\sqrt{3}$, puis les racines carrées de $3 + 4i$.
   b) Vérifier que l'étudiant sait mettre un trinôme du second degré $az^2 + bz + c$ ($a \neq 0$) sous forme canonique.
   c) Résolution de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ et/ ou de $z^2 + 2z + \frac{7}{4} + i = 0$
8. On note $\mathcal{U}_n = \{z \in \mathbb{C}, z^n = 1\}$. Démontrer que $\mathcal{U}_n = \{e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in [\![0, n-1]\!]\}$ puis que $\mathcal{U}_n$ est de cardinal n. Représentation dans le plan complexe.
9. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = -1$ ou $z^6 = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$ et/ou pour $a \in \mathbb{C}^*$, résolution de $z^n = a$. Représentation dans le plan complexe.
   On écrit a sous forme trigo et on utilise le résultat de cours sur $\mathcal{U}_n$ une fois qu'on s'est ramené à $z^n = z_0^n$.
10. Soit P, Q des assertions logiques.
    Sans démonstration : donner le contraire de l'assertion (P et Q),
    donner le contraire de l'assertion (P $\implies$ Q),
    donner une assertion équivalente à (P ou Q).

PRÉVISIONS : Complexes (fin) : exponentielle complexe, applications à la géométrie et description des similitudes directes.
Logique : quantificateurs, méthodes de démonstrations. Ensembles.
Puis Applications (injection, surjection, bijection, notions d'image directe et réciproque).