

Programme de colle (semaine 3) - 30 septembre

La colle débutera par une ou plusieurs questions de cours citées en fin de programme de colle. Le cours doit être parfaitement su.

Nombres complexes

programme de la semaine dernière, en particulier **Racines n ème de l'unité** et en plus :

Exponentielle complexe (définition, propriétés, relations fonctionnelles, équation $e^z = a$ pour $a \in \mathbb{C}^*$)

Similitudes du plan Expression complexe des transformations affines du plan telles que réflexion par rapport à (Ox) , translations, rotations et homothéties. Définition d'une similitude directe.

Théorème : les similitudes directes sont les applications d'expression complexe : $z \mapsto az + b$.

Utilisation des nombres complexes en géométrie.

Éléments de logique

1. Proposition Logique. Négation, conjonction, disjonction, implication, équivalence.
2. Quantificateurs \forall et \exists
3. Méthodes de démonstration : récurrence, contraposée, raisonnement par l'absurde, raisonnement par analyse-synthèse.
4. Ensembles (appartenance, inclusion, opérations : intersection, réunion, complémentaire, produit cartésien)

QUESTIONS DE COURS :

1. *Exo.* On note P le polynôme $P = (X + i)^n - (X - i)^n$. Déterminer les racines de P dans \mathbb{C}
2. *Exo (type cours)* résoudre $e^z = 1 - i$ ou résoudre $e^z = a$ où $a \in \mathbb{C}^*$ (d'inconnue $z \in \mathbb{C}$).
3. Reconnaître la transformation du plan d'écriture complexe donnée par $f(z) = (1 + i)z - 2$ (ou n'importe quel exemple du type $f(z) = az + b$ où (a, b) est choisi par le colleur dans $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ ou donner l'écriture complexe d'une similitude dont les éléments caractéristiques sont donnés par le colleur ; par exemple écriture complexe de :
 - la translation de vecteur $\vec{u}(5, -1)$
 - la rotation de centre $\Omega(1, 2)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$
 - l'homothétie de centre O et de rapport -3
 - de la similitude de centre $I(-1, 1)$, d'angle $\pi/4$ et de rapport 2
4. *Pour travailler sur les quantificateurs* Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, où $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$. Écrire la définition formelle de chacune des assertions suivantes puis écrire leur négation.
 - a) f est périodique ; b) f est majorée ; c) f est paire ; d) f est la fonction nulle ; e) f ne s'annule pas.
5. *Pour travailler sur les notations ensemblistes.* Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de parties d'un ensemble E . Soit x un élément de E . Écrire les assertions suivantes en utilisant uniquement les symboles \in , \cup , \cap et $\bar{}$ (passage au complémentaire)
 - a) «à partir d'un certain rang x appartient à tous les ensembles A_i »
 - b) « x appartient à une infinité d'ensembles A_n »
6. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel (*pour travailler le raisonnement par l'absurde*).
7. Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ peut s'écrire de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire (*pour travailler le raisonnement par Analyse/Synthèse*).
8. Montrer que le complémentaire d'une réunion (quelconque) d'ensembles est l'intersection des complémentaires (ou résultat sur le complémentaire d'une intersection).

PRÉVISIONS : Applications : injectivité, surjectivité, notions d'image directe et d'image réciproque.

Puis Analyse réelle : révision de Terminale et compléments (dérivabilité d'une réciproque) et utilisation des théorèmes généraux d'analyse réelle (TVI,...) Puis étude des fonctions usuelles.