

Programme de colle - semaine 5- du 14 octobre

La colle débutera par une ou plusieurs questions de cours citées en fin de programme de colle. Le cours doit être parfaitement su.

A- Applications

injectivité, surjectivité, image directe et réciproque : **tout exercice sur le sujet.**

B - Révision d'analyse et compléments

la notion de limite est admise (pas de définition pour l'instant autre qu'intuitive). Continuité en un point, sur un intervalle.

— Énoncés ci-dessous à connaître parfaitement (*) (résultats admis à ce stade de l'année :

— Passage à la limite dans une inégalité.

— Théorème d'encadrement.

On veillera à ce que les élèves ne confondent pas ces deux premiers résultats et qu'ils vérifient que toutes les limites existent avant de passer aux limites dans une inégalité. On corrigera les lim écrits trop tôt (avant de savoir que la limite existe).

— Théorème des valeurs intermédiaires (dans ses différentes versions) : si f continue sur $[a, b]$ et si y est un réel entre $f(a)$ et $f(b)$, alors y possède au moins un antécédent dans $[a, b]$ ou "l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle".

— Théorème de la bijection monotone (on a admis la continuité de la réciproque).

— Règles opératoires sur les dérivées ; en particulier dérivée d'une composée.

— Lien entre le signe de la dérivée et la monotonie de la fonction sur des intervalles.

— Théorème de la limite monotone (énoncé dans le cas d'une fonction monotone sur $[a, b[$ pour la limite en b dans $\bar{\mathbb{R}}$.)

— Théorème de dérivation de l'application réciproque. (on l'a démontré en admettant la continuité de f^{-1}).

— position relative des tangentes pour une fonction f convexe dérivable. Application aux fonctions usuelles ($x \mapsto \ln(1+x)$, \exp , \sin ...)

— Effet des transformations élémentaires du plan sur le graphe d'une fonction, en particulier, à partir du graphe d'une fonction f savoir construire le graphe de $x \mapsto f(x+a)$, de $x \mapsto f(x)+b$, de $x \mapsto f(T-x)$, de $x \mapsto f(ax)$, de $x \mapsto af(x)$.

Savoir déterminer si une fonction possède une symétrie par rapport à une droite d'équation $x = a$.

NB cette année, les élèves ne savent pas encore déterminer l'existence d'une droite asymptote oblique (ou d'une autre branche infinie). La notion sera vue lors du chapitre DL et équivalents.

C -Fonction puissance d'exposant réel

Définition, étude, graphe, convexité. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^\alpha - 1}{h} = \alpha$.

— résultats de croissances comparées de ces fonctions en 0 et $+\infty$.

— *exo* : étude de $x \mapsto x^x$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$

NB l'utilisation des croissances comparées pour lever les indéterminations de limites sera vue lundi et sera exigible en colle à partir de mercredi.

QUESTIONS DE COURS ou exo de cours :

La colle démarrera par des définitions sur les applications : **injectivité, surjectivité, bijectivité, espace image, définition des images directes et réciproques d'une partie par une application** car les compte-rendus de colle montrent que les élèves ont besoin de retravailler ces notions.

- (a) Donner le graphe de $f : x \mapsto \ln(1+x)$ à partir du graphe de \ln (et position de la tangente en 0) et/ou celui de $x \mapsto \sqrt{2-x}$ à partir de $\sqrt{\cdot}$.
(b) Si $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, savoir caractériser " Γ_f a une symétrie par rapport à la droite $x = a$ ".
- exo* Allure locale au voisinage de 1 de la fonction $x \mapsto \sqrt{|\ln x|}$
- Exo* Si f est une fonction réelle continue sur $[a, b]$ avec $f([a, b]) \subset [a, b]$ alors f admet un point fixe c'est-à-dire qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.
- Exo* Montrer que la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$ possède un unique point fixe sur \mathbb{R} , (c-à-d qu'il existe un unique réel a tel que $f(a) = a$).
- exo* Montrer que l'application $u : x \mapsto \cos(1/x)$ n'a pas de limite en 0 (on a raisonné par l'absurde et utiliser le principe de composition des limites avec des suites bien choisies qui tendent vers 0.) Ou (similaire) montrer que \sin n'a pas de limite en $+\infty$.
- $f : x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$. Montrer que f réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $[1, +\infty[$. Étude de la dérivabilité de f^{-1} et expression simple de $(f^{-1})'(t)$ lorsque ça a du sens.
- (a) Démonstrations des règles sur les exposants : pour $x > 0, y > 0, \alpha, \beta$ réels, valeurs de $x^{-\alpha}, x^{\alpha+\beta}, (x^\alpha)^\beta$, et $(xy)^\alpha$.
(b) Graphes de $x \mapsto x^\alpha$ (sans démonstration) selon les valeurs de α . On précisera quels exposants α ont permis un prolongement par continuité en 0 et parmi eux ceux qui donnent une fonction dérivable en 0.
- Déterminer l'expression de la dérivée nième de \ln sur \mathbb{R}_+^* . On veillera à ce que les élèves écrivent $1/x^n = x^{-n}$ pour dériver comme une fonction puissance.
- pour corriger un DM. Soit ω un nombre irrationnel. Montrer que

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Q}^2, (a + b\omega = 0 \implies a = 0 \text{ et } b = 0)$$

PRÉVISIONS : Sem 6 : Étude de arcsin, arccos, arctan, ch, sh, th et probablement Sem 7 : techniques de calcul intégral.