8. Évolution temporelle et portrait de phase

1. Pour déterminer le signe de la vitesse, on regarde si la courbe a une pente positive en $t = 0$ ou une pente négative car la vitesse représente la dérivée de la position par rapport au temps. On a

n°	1	2	3
$y_k(t=0)$ (cm)	0,8	0,8	3,9
T_k (s)	2	2	2
signe de $\dot{y}_k(t=0)$	< 0	> 0	< 0

2. Ce sont des courbes qui oscillent avec la même période donc avec la même pulsation ω_0.
3. Prenons une fonction $y(t) = \mathrm{A}\sin(\omega_0 t + \varphi)$. Dérivons $y(t)$ pour trouver la vitesse d'où

$$v_y(t) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \omega_0 \mathrm{A}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

L'amplitude de $v_y(t)$ que l'on va noté V_y vaut donc

$$\boxed{\mathrm{V}_y = \omega_0\,\mathrm{A}}$$

avec A l'amplitude de $y(t)$.

> Si on avait pris $y(t) = \mathrm{A}\cos(\omega_0 t + \varphi)$, on aurait eu
> $$v_y(t) = -\omega_0 \mathrm{A}\sin(\omega_0 t + \varphi)$$
> Mais l'amplitude par définition est la constante POSITIVE devant la partie variable. Comme on peut écrire v_y sous la forme
> $$v_y = \omega_0 \mathrm{A}\sin(\omega_0 t + \varphi + \pi)$$
> alors l'amplitude vaut toujours $\mathrm{V}_y = \omega_0 \mathrm{A}$.

4. Pour trouver la valeur maximale de la vitesse, on doit simplement trouver l'amplitude de chaque courbe et la multiplier par ω_0 (d'après la question précédente), avec

$$\mathrm{V}_y = \omega_0\,\mathrm{A} = \frac{2\pi}{\mathrm{T}}\,\mathrm{A}$$

avec $\mathrm{T} = 2$ s donc

$$\boxed{\mathrm{V}_{y_1} = 3{,}5 \text{ cm.s}^{-1} \quad \mathrm{V}_{y_2} = 8{,}2 \text{ cm.s}^{-1} \quad \mathrm{V}_{y_3} = 13 \text{ cm.s}^{-1}}$$

5. Si on représente (avec vos calculettes par exemple) ces courbes, c'est-à-dire en ordonnée quelque chose qui varie en $\sin(\omega_0 t)$ et en abscisse en $\cos(\omega_0 t)$ (avec des coefficients différents devant chaque fonction), on trouve des ellipses.

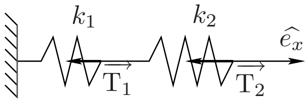
10. Modélisation d'un fil élastique

$\boxed{1}$ Notons $\overrightarrow{\mathrm{T}_1}$ (respectivement $\overrightarrow{\mathrm{T}_2}$) la tension exercée par le ressort 1 (respectivement le ressort 2). Le point d'attache des deux ressorts subit $-\mathrm{T}_1\,\widehat{e_x}$ de la part du ressort 1 et $\mathrm{T}_2\,\widehat{e_x}$ du ressort 2. Ainsi, comme la masse du point d'attache est nulle,

$$\overrightarrow{\mathrm{T}_1} - \overrightarrow{\mathrm{T}_2} = \overrightarrow{0}$$

d'où $$\overrightarrow{T_1} = \overrightarrow{T_2} = \overrightarrow{T}$$

Les notations sont représentées sur le schéma ci-dessous :



Comme chaque ressort suit la loi de Hooke, alors, en notant X_i l'allongement du ressort i,

$$\begin{cases} T_1 = k_1\,(\ell_1 - \ell_{01}) = k_1\,X_1 \\ T_2 = k_2\,(\ell_2 - \ell_{02}) = k_2\,X_2 \end{cases}$$

Or, l'allongement total X_{eq} correspond à

$$X_{eq} = \frac{T}{k_{eq}} = X_1 + X_2 = \frac{T}{k_1} + \frac{T}{k_2}$$

donc $$\boxed{\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$$

De même, la force du ressort équivalent vaut

$$F = k_{eq}\,(\ell - \ell_0) = k_{eq}\,(X_1 + X_2) = k_{eq}\,(\ell_1 - \ell_{01} + \ell_2 - \ell_{02})$$

$$\boxed{\text{La longueur à vide } \ell_0 \text{ du ressort équivalent vaut donc } \ell_0 = \ell_{01} + \ell_{02}.}$$

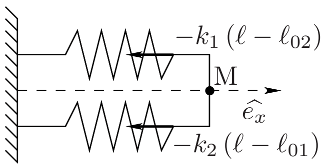
Avec la formule de k_{eq} trouvée ci-dessus, on constate que

$$\frac{1}{k_{eq}} > \frac{1}{k_1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{k_{eq}} > \frac{1}{k_2}$$

Par conséquent, la constante de raideur du ressort équivalent est plus petite que celle de chacun des deux ressorts.

$$\boxed{\text{Le ressort équivalent est donc plus souple.}}$$

2 Notons x la coordonnée du point M défini sur le schéma ci-dessous et m sa masse. Le système est représenté ci-dessous.



Le principe fondamental de la dynamique appliqué au point M et projeté sur l'axe (Ox) s'écrit :

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -k_1\,(x - \ell_{01}) - k_2\,(x - \ell_{02})$$

À l'équilibre, cette équation se réduit à

$$0 = k_1\,(x_e - \ell_{01}) - k_2\,(x_e - \ell_{02}) \iff x_e = \frac{k_1\,\ell_{01} + k_2\,\ell_{02}}{k_1 + k_2}$$

Si l'on soustrait les deux équations ci-dessus, on obtient

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -k_1\,(x - x_\mathrm{e}) - k_2\,(x - x_\mathrm{e}) = -(k_1 + k_2)\,(x - x_\mathrm{e})$$

On obtient l'équation d'un point M qui subit la tension d'un ressort unique de raideur équivalente k_eq et de longueur à vide $\ell_0 = x_\mathrm{e}$ avec

$$\boxed{k_\mathrm{eq} = k_1 + k_2 \qquad \text{et} \qquad \ell_0 = \frac{k_1\,\ell_{01} + k_2\,\ell_{02}}{k_1 + k_2}}$$

Plus un ressort a une constante de raideur élevée, moins ce dernier est souple : il est plus difficile de l'étirer. On en déduit que

$$\boxed{\text{le ressort équivalent est plus raide que chacun des deux autres.}}$$