# Programme de colle - semaine 7 - semaine du 11 novembre

Le cours doit être parfaitement su.

### Complément de calcul intégral

1) Préliminaire sur les dérivées et primitives d'une fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$
2) Techniques de calcul intégral :

— Intégration par parties et changement de variables. *NB : écrit au programme officiel . "Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité".*

— Utilisation des symétries ou des périodes pour un calcul d'intégrales.

— Primitives des fonctions rationnelles du type $1/(x^2+px+q)$ où $p$ et $q$ réels.

— Primitives d'une fonction d'expression $1/(x-z_0)$ où $z_0 \in \mathbb{C}$.

— Méthode pour le calcul des primitives des polynômes en $\sin$ et $\cos$.

— Rappel des techniques d'encadrement pour les intégrales.

## QUESTIONS DE COURS :

1. Existence et calcul pour $x \in [-1,1]$ de $\mathrm{F}(x) = \int_0^x \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$
2. Existence et calcul de $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}t}{\sin t}$ (on donne le changement de variable $x = \tan(t/2)$).
3. Primitives de $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+5x-6}$ en précisant les intervalles où elles sont valables *(ou un exemple similaire au choix du colleur)*
4. Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2-x+1}\mathrm{d}x$.
5. Primitives de $f : x \mapsto 1/(x-z)$ où $z \in \mathbb{C}$ fixé, en distinguant $z \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
6. *Transformée de Laplace.* Si $p \in \mathbb{C}$ vérifie Re p $> 0$, montrer que $\lim_{\mathrm{A}\to+\infty} \int_0^{\mathrm{A}} \cos(x)e^{-px}\mathrm{d}x$ existe dans $\mathbb{R}$ en calculant sa valeur *(on note* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x)e^{-px}\mathrm{d}x$ *cette limite finie).*
7. *Exo* Si $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$, on note $u_n = \displaystyle\int_0^1 f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que la suite est bornée.
   (b) Si on suppose $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ montrer que $\lim u_n = 0$.
8. On note $\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$.
   (a) Montrer que la suite $(\mathrm{I}_n)_n$ est bien définie, qu'elle est monotone et convergente vers 0.
   (b) À l'aide d'une IPP, montrer que $\mathrm{I}_n \sim \frac{1}{2n}$. *Note au colleurs, on vient de commencer le cours sur les équivalents, la notation $\sim$ doit être connue, mais aucun exercice sur les équivalents dans cette colle...*
9. *Travail de la correction d'un devoir. Note aux colleurs, vous pouvez poser une (ou plusieurs) question(s) parmi les suivantes, mais pas forcément toutes les questions* : On note $f$ la fonction d'expression $f(x) = \left|\frac{x-2}{x}\right|^x$
   (a) Domaine de définition de $f$.
   (b) Justifier que $f$ peut se prolonger par continuité en $0$. On notera encore $f$ la fonction prolongée.
   (c) Domaine de continuité de $f$.
   (d) Vérifier que $f$ possède en $\pm\infty$ une limite finie.
   (e) Justifier que $\forall t > -1$, $\ln(1+t) \leq t$, puis établir la position relative de la courbe de $f$ par rapport à l' asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$. Même question au voisinage de $+\infty$.

**PRÉVISIONS :** Colle sur les DL et développements asymptotiques