Programme de colle - semaine 9 - semaine du 25 novembre

Le cours doit être parfaitement su.

Étude locale des fonctions au voisinage d'un point. Développements limités, développements asymptotiques

Dans ce chapitre, nous avons utilisé la définition intuitive de la limite vue au lycée et admis les résultats classiques sur les limites (opérations). Nous avons admis le résultat de primitivation d'un DL. Nous démontrerons ultérieurement ces résultats (chapitre LIMITES, et INTEGRATION).

1 - Comparaison de fonctions au voisinage d'un point $a \in \bar{\mathbb{R}}$

1. Fonctions équivalentes. Définition. Réflexivité, symétrie, transitivité. Produit, inverse, puissances d'équivalents. Équivalents classiques. Application au calcul de limites.
2. Fonction dominée par une autre, négligeable devant une autre. Définition. Notation O et o. Transitivité. Relations de comparaison classique. Règle de somme et de produit de fonctions dominées et de fonctions négligeables. Lien avec l'équivalence : $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ si et seulement si $f(x) = g(x) + \underset{x\to a}{o}(g(x))$.
3. Extension des notations aux suites.

2- Développements limités

1. Définition, propriétés élémentaires. Définition d'une fonction admettant un développement limité à l'ordre n au voisinage $a \in \mathbb{R}$.
   EXEMPLE fondamental : $\dfrac{1}{1-x}$ en 0.
   Partie régulière d'un DL, unicité des coefficients d'un DL. Application au DL en 0 d'une fonction paire (resp. impaire).
   Troncature pour obtenir un développement limité à l'ordre $p < n$.
   Équivalence entre continuité et existence d'un DL à l'ordre 0 ; entre dérivabilité et existence d'un DL à l'ordre 1.
2. Primitivation d'un DL.
   Théorème(Primitivation) Si f est continue sur l'intervalle I, $a \in \mathrm{I}$, si f admet au voisinage de a un DL à l'ordre n, toute primitive F de f admet au voisinage de a un DL à l'ordre $n+1$ obtenu par intégration terme à terme. *(Théorème admis pour l'instant)*
   EXEMPLE : DL en 0 de $\ln(1+x)$, de $\arctan x$ et $\tan x$ (à l'ordre 3), $\arcsin x$ (à un petit ordre) (par primitivation) ;
   Conséquence (condition suffisante d'existence d'un DL) : pour f n fois dérivable, on a la formule de Taylor-Young.
3. DL en 0 classiques. e^x, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\cos x$, $\sin x$, $(1+x)^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ (par calcul des dérivées successives en 0).
4. Opérations sur les DL.
   DL d'une somme, d'un produit. Pour le produit, intérêt de la forme normalisée d'un DL avec mise en facteur de la partie principale.
   Si f a un DL en a et si $f(a) \neq 0$, alors $1/f$ admet un DL en a ; en pratique, on trouve le DL de $1/f$ par composition avec $1/(1-u(x))$ qd $u(x) \to 0$. *La méthode de division selon les puissances croissantes est hors-programme.*
   Aucun résultat général n'a été donné sur la composition de DL. Sur des exemples : DL en a de l'inverse d'une fonction f non nulle en a et DL d'une composée (traité en cours $\ln(\cos(x))$, $e^{\sin(x)}$ et d'autres exemples ont été traités en exercices).
5. Développements limités en un point autre que 0.

6. Développements asymptotiques pour des fonctions ou des suites. Exemple de recherche d'asymptotes (droite ou courbes) et de position par rapport à la courbe.

La formule de Taylor-Young et les DL en 0 des fonctions usuelles suivantes doivent être connus par coeur :

(*)	à tout ordre : $\dfrac{1}{1-x}$, $\dfrac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$, e^x, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^\alpha$. à l'ordre 3 : $\arctan x$ et $\tan x$

QUESTIONS DE COURS :

La colle commencera par un (ou plusieurs) des DLs des fonctions usuelles à donner par coeur, (listés ci-dessus)) et/ou l'écriture de la formule de Taylor-Young. Dans un deuxième temps, on pourra (éventuellement) demander la démonstration. Au départ, les élèves doivent les donner directement, sans repasser par la démonstration. Puis une question de cours parmi les suivantes :

1. Exo : déterminer le DL au voisinage de 0 à l'ordre 5 de la fonction $\arcsin$
2. Exo : On pose $h(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$.
   (a) Donner le domaine D de définition de h.
   (b) Montrer que h se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$
3. Exo : sachant que $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et que $\tan'(x) = 1+\tan^2(x)$, retrouver à l'aide du théorème de primitivation le DL de $\tan x$ en 0 à l'ordre 3 puis 5 (éventuellement 7)
4. Exo : déterminer le DL en 0 à l'ordre 5 de $\ln(\cos x)$.
5. Exo : 1) Donner le développement asymptotique de $f(x) = \frac{1}{x+1}$ au voisinage de $+\infty$ (2 termes)
   2) Trouver le DL de $1/x$ au voisinage de 3 à l'ordre 4.
6. Développement asymptotique en $+\infty$ de $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$, branche infinie en $+\infty$ (équation de l'asymptote et position par rapport à celle-ci).
7. Énoncer et démontrer le résultat sur la résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène normalisée du type $y' + a(x)y = 0$ où a est une fonction continue sur un intervalle I. *Aucun exercice sur ce sujet cette semaine.*
8. Présenter la méthode de variation de la constante pour la recherche d'une solution particulière à une EDL d'ordre 1 : $y' + a(x)y = b$ où a, b continues sur l'intervalle I. *Aucun exercice sur ce sujet cette semaine.*

Note aux colleurs : Le chapitre *Développements limités* intervient tôt dans l'année. Il est sûr que le caractère local est difficile à appréhender en début d'année. Cette semaine, il faudra sûrement guider les élèves dans les exercices et expliquer le choix des ordres, ré-expliquer la signification des écritures, insister sur l'importance de bien ordonner les termes, de mettre en facteur la quantité dominante. Nous continuerons les calculs sur les DL tout au long de l'année. **La semaine suivante, les DLs resteront au programme de colle.**

PRÉVISIONS : Exercices sur les DL et développements asymptotiques + cours et exos sur Équations différentielles linéaires d'ordre 1 et d'ordre 2 à coefficients constants.