Programme de colle - semaine 10 - du 2 décembre

Note aux colleurs : cette semaine les exercices porteront uniquement sur les équations différentielles et les DL ou développements assymptotiques. Les questions de cours peuvent porter sur équations différentielles et/ou relations binaires.

Le cours doit être parfaitement su.

A) Développements limités et asymptotiques : exercices

B) Équations différentielles linéaires : QC et exercices

Définition d'une équation différentielle linéaire d'ordre n sur un intervalle I, d'une solution sur I. Vocabulaire : second membre, équation homogène.

Structure : si S désigne l'ensemble des solutions d'une ED Linéaire et $\mathrm{S_H}$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée :

— $\mathrm{S_H}$ contient la fonction nulle et est stable par combinaison linéaire.

— si $y_p \in \mathrm{S}$, on a : ($y \in \mathrm{S} \iff (y - y_p) \in \mathrm{S_H}$), soit $\mathrm{S} = \{y_p\} + \mathrm{S_H}$.

1) Équations différentielles linéaires d'ordre 1

1. Solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène et normalisée ($y' + a(x)y = 0$, où a est continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
2. Existence et calcul d'une solution particulière à l'équation $y' + a(x)y = b(x)$, où a et b sont continues par la méthode de la variation de la constante.
3. Problème de Cauchy pour les équations différentielles linéaires d'ordre 1 normalisées.
4. Équation non normalisée : recherche de solutions (par analyse/synthèse).

2) Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Solutions complexes de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ où $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, $a \neq 0$.
   Solutions réelles dans le cas où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$.
2. Recherche de solutions particulières : principe de superposition des solutions, utilisation de second membres complexes. Cas particulier de second membre de type $f(x) = e^{\alpha x}\mathrm{P}(x)$ où $\alpha \in \mathbb{C}$ et P polynôme. Exemple avec second membre du type $e^{mx}\cos(\alpha x)$ ou $e^{mx}\sin(\alpha x)$
   Exemples du cours : $y'' + y' + y = e^x \cos(x)$ (en passant par $\mathrm{Re}(e^{(1+i)x})$) et $y'' - y = \mathrm{ch}x$.
3. Existence et unicité au problème de Cauchy pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants (on a admis l'existence d'une solution.)

Rien d'autre dans le cours concernant les équations différentielles.

Vu en exercices : séparation des variables, des changements de fonctions permettant de résoudre des équations différentielles non-linéaires (les changements de fonctions étant donnés).

C) Relations binaires (QC - pas d'exercices sur ce sujet cette semaine)

Le cours sur les relations d'équivalence, les relations d'ordre et la notion de borne inf, sup a été commencé. Cette semaine, aucun exercice sur ce thème, mais une définition et une QC parmi celles proposées.

• Relations d'équivalence.
• Relations d'ordre.

1. Ordre total, ordre partiel, plus grand élément, plus petit élément.
   Propriété de $\mathbb{N}$: toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément. Conséquence : théorème de récurrence.

2. Si A est une partie d'un ensemble ordonné E, définition d'un majorant de A de E, d'un minorant de A dans E. Partie majorée, minorée, bornée. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ et majorée dans $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément. Définition de la borne supérieure et inférieure d'une partie A de E.
3. Propriété de la borne sup (borne inf) pour $\mathbb{R}$ (admise) : toute partie non vide de $\mathbb{R}$ et majorée possède une borne sup.

   Caractérisations de la borne sup dans $\mathbb{R}$:
   - $b = \sup \mathrm{A}$ ssi b est un majorant de A et si $\forall \varepsilon > 0, \exists\, a \in \mathrm{A}, b - \varepsilon < a$;
   - $b = \sup \mathrm{A}$ ssi b est un majorant de A et s'il existe une suite de points de A qui converge vers b. (admis, sera justifié dans le chapitre *suites réelles*)

   Caractérisations analogues pour les bornes inf.

QUESTIONS DE COURS : La question de cours comportera obligatoirement une question de cours sur le cours "relation binaire", et ensuite éventuellement une question de cours sur les EDL. Les exercices seront exclusivement sur les chapitres DL et EDL (sans trop d'originalité SVP pour les EDL ; dans un premier temps, il convient de vérifier que les élèves sont au point sur les résultats du cours).

1. Donner une ou plusieurs définitions suivantes (au choix du colleur) :
   - relation d'équivalence
   - relation d'ordre. relation d'ordre total.
   - Si E ensemble ordonné, définition du plus grand élément de E (s'il existe).
     Si $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$, définition de A partie majorée dans E, de $\sup_{\mathrm{E}} \mathrm{A}$.
   - Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et majorée, si x est un réel savoir écrire avec des quantificateurs une assertion logique équivalente à $x < \sup \mathrm{A}$.
2. Soit u, v deux suites réelles bornées telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ demander de comparer les inf et les sup ou idem avec des fonctions réelles $f \leq g$ bornées.
3. Soit A et B deux parties non vides bornées de $\mathbb{R}$ telles que $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$. Justifier $\inf \mathrm{B} \leq \inf \mathrm{A} \leq \sup \mathrm{A} \leq \sup \mathrm{B}$.
4. Présenter la méthode de variation de la constante pour la recherche d'une solution particulière d'une EDL d'ordre 1 : $y' + a(x)y = b(x)$ où a, b continues sur l'intervalle I.

   Note au colleur : cela peut aussi bien être évalué sur un exemple au cours d'un exercice.
5. Solutions réelles de $y'' - 3y' + 2y = 0$ ou de $y'' - 2y' + y = 0$ ou de $y'' + \omega^2 y = 0$ (où $\omega \in \mathbb{R}$) ou de $y'' + y' + y = 0$

   (ou bien un autre exemple au choix du colleur. La connaissance du cours peut aussi bien être évaluée au cours d'un exercice au choix du colleur.).
6. Expliquer comment trouver une solution particulière de $y'' + y' + y = e^x \cos(x)$ ou de $y'' - y = \mathrm{ch}(x)$ ou de $y'' - 4y' + 4y = x\,\mathrm{ch}(2x)$.

   (On n'exigera pas forcément les calculs mais on vérifiera que l'étudiant a compris comment trouver une solution particulière dans ses situations). Ces techniques peuvent être évaluées au cours d'un exercice.

PRÉVISION : Relations binaires, ensemble ordonné, borne sup. Nombres réels. Puis Suites numériques.