LMB *MPSI2*

Programme de colle semaine 12 - semaine du 16 décembre

La colle débutera par une ou plusieurs questions de cours. Le cours doit être parfaitement su.

Suites réelles

1. Suites monotones. Suites majorées, minorées, bornées.
2. Définition de la convergence d'une suite. Unicité de la limite. Toute suite convergente est bornée.
   Opérations sur les suites convergentes. Somme, produit, inverse lorsque la limite est non nulle.
3. Limites infinies. Définition. Opérations sur ces suites et notamment somme d'une suite minorée et d'une suite qui tend vers $+\infty$, inverse...
4. Limite et relation d'ordre : conservation des inégalités larges dans un passage à la limite.
5. Théorèmes d'existence de limites : théorème d'encadrement, suites monotones (bornées ou non), suites adjacentes.
6. Compléments : caractérisation séquentielle des bornes sup (inf), caractérisation séquentielle des parties denses.
7. Sous-suites. Si u tend vers $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$, alors toute suite extraite de u tend vers ℓ. Si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers la même limite ℓ dans $\bar{\mathbb{R}}$, alors u tend vers ℓ.
8. Valeurs d'adhérence, théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites réelles bornées.

N.B. Le cours n'est pas tout à fait fini : *Les suites à valeurs complexes seront abordées la semaine prochaine.*

N.B. *Ne pas donner d'exercice du type : $u_{n+1} = f(u_n)$. Les suites récurrentes feront l'objet d'une étude spécifique après le cours sur la dérivabilité et les accroissements finis.*

Cette semaine, ne pas donner non plus d'exercices avec des suites définies implicitement, nous n'avons pas eu le temps de traiter ce type d'exos. Les suites resteront au programme de colle de la semaine de la rentrée.

QUESTIONS DE COURS :

1. - Si u_n converge vers un réel ℓ strictement positif, alors APCR $u_n \geq \frac{\ell}{2} > 0$ et limite de $1/u_n$.
   - Si u_n tend vers 0 et à valeurs strictement positives, limite de $1/u_n$.
   - Si u tend vers $+\infty$, alors APCR $u_n > 0$ et limite de $1/u_n$.
2. Comportement des suites croissantes (démonstration dans le cas suite majorée ou non majorée, au choix du colleur).
   + Exo : soit u la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + u_n^2$. Justifiez $\lim u = +\infty$.
3. Convergence de deux suites adjacentes $(a_n)_n$ et (b_n) avec encadrement de la limite : $\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n - \ell| \leq |b_n - a_n|$.
4. Caractérisation séquentielle d'une partie dense de $\mathbb{R}$: une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout réel est limite d'une suite de points de A.
   (On a défini A dense dans $\mathbb{R}$ par :$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \mathrm{A} \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\neq \emptyset$)
5. Si les sous-suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ tendent vers ℓ ($\ell \in \bar{\mathbb{R}}$), alors la suite $(u_n)_n$ tend vers ℓ. Pour la démonstration, on choisira $\ell \in \mathbb{R}$ ou $\ell = \pm\infty$).
6. Exercice (somme harmonique) Utiliser une méthode du type "comparaison intégrale" pour montrer que $\mathrm{H}_n \sim \ln n$.
7. Exercice Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$.
   (1) Montrer que la suite (S_n) est convergente *(suite croissante et majorée, majoration par comparaison somme/intégrale).*
   (2) On note $\zeta(3)$ sa limite. Montrer que $\zeta(3) - u_n \sim \frac{1}{2n^2}$ et que $\zeta(3) - (u_n + \frac{1}{2n^2}) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$
8. Exercice *(théorème de Cesàro).*
   (1) Si $(u_n)_n$ converge vers ℓ. Montrer que la suite de terme général $c_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$ converge vers ℓ.
   (2) Cas où la suite u tend vers $+\infty$.

PRÉVISIONS : Exercices sur les suites (y compris suites complexes). Puis Structures (groupes, anneaux, corps).

N.B. La classe MPSI2 part travailler à la montagne du 19 au 25 janvier 2025. Il n'y aura pas de colle la semaine correspondante