Programme de colle semaine 13 - semaine du 6 janvier

La colle débutera par une ou plusieurs questions de cours. Le cours doit être parfaitement su.

Suites réelles et complexes

Tout le chapitre y compris les suites complexes ou les suites définies de manière implicite, les exercices type découpage à la Cesàro, etc.

N.B. le cours sur les structures est à peine commencé. Nous n'avons pas encore vu la notion de morphisme. Pas d'exercices sur ce thème cette semaine, uniquement quelques questions de cours.

QUESTIONS DE COURS :

1. Exercice Soit $\alpha > 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.
   (1) Montrer que la suite $(\mathrm{S}_n)_n$ est convergente.
   (2) On note $\zeta(\alpha)$ sa limite. Montrer que $\zeta(\alpha) - u_n \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ et que $\zeta(\alpha) - (u_n + \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$
2. Exercice Montrer que de toute suite réelle qui tend vers $+\infty$, on peut extraire une suite croissante.
3. Exercice Soit u une suite à valeurs strictement positives et telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ existe. On note $\ell = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$
   (1) On suppose que $0 \leq \ell < 1$. Montrer que $\lim u_n = 0$ *(on a choisi $\rho \in]\ell, 1[$, et établi $u_n = \mathrm{O}(\rho^n)$)*
   Application : pour tout complexe z, la suite de terme général $\frac{z^n}{n!}$ tend vers 0.
   (2) Montrer que si $\ell > 1$, alors $u_n \to +\infty$.
4. Exercice
   (1) Soit $q \in \mathbb{C}$ tel que $|q| = 1$ et $q \neq 1$. Montrer que la suite $(q^n)_n$ est divergente.
   (2) En déduire que $(e^{in})_n$ est une suite divergente puis établir que les suites $(\cos(n))_n$ et $(\sin(n)_n$ sont toutes les deux divergentes.
5. Détermination des sous-groupes de $\mathbb{Z}$ (on a admis et utilisé la division euclidienne)
6. L'ensemble des éléments inversibles d'un anneau est un groupe (pour la loi $\times$).
   Donner sans démonstration le groupe des éléments inversibles des anneaux $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
7. Vu en exercice : montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$ mais n'est pas un corps, et que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

PRÉVISIONS : Structures (groupes, anneaux, corps).

Bonnes vacances et belles fêtes de fin d'année !

N.B. La classe MPSI2 part travailler à la montagne du 19 au 25 janvier 2025. Il n'y aura pas de colle la semaine correspondante