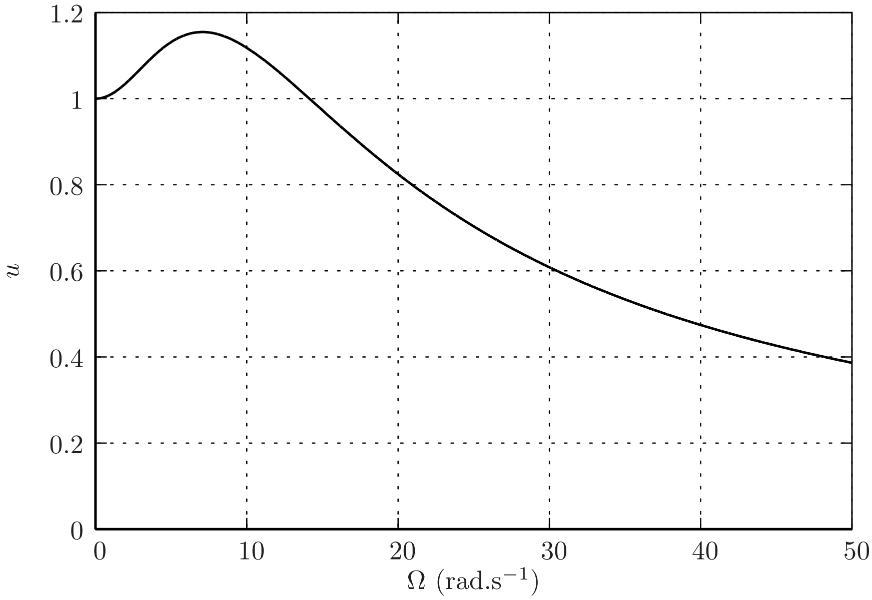
DM08 - Correction

1. Bilan des forces s'exerçant sur M à l'équilibre : $\overrightarrow{\mathrm{P}} = -mg\overrightarrow{u_z}$, force de rappel du ressort : $\overrightarrow{\mathrm{T}} = -k(\ell(t) - \ell_0)\overrightarrow{u_z}$ avec $\ell(t) = z_\mathrm{M} - z_\mathrm{P} = z_\mathrm{M} = z_\mathrm{eq}$, la force exercée par l'amortisseur est nulle. À l'équilibre la somme des forces est nulle, on en déduit
$$\boxed{z_\mathrm{eq} - \ell_0 = -\frac{mg}{k} \qquad \text{et} \qquad z_\mathrm{eq} = \ell_0 - \frac{mg}{k}}$$
2. On a $x(t) = \mathrm{V}_0 t$. Ainsi
$$\boxed{\Omega = \frac{2\pi \mathrm{V}_0}{\lambda}}$$
3. On a
$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{T}} = -k(\ell(t) - \ell_0)\overrightarrow{u_z} = -k(z_\mathrm{M} - z_\mathrm{P} - \ell_0)\overrightarrow{u_z}}$$
4. Bilan des forces :
$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{P}} = -mg\overrightarrow{u_z} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathrm{T}} = -k(z_\mathrm{M} - z_\mathrm{P} - \ell_0)\overrightarrow{u_z} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathrm{F}} = -h(\dot{z_\mathrm{M}} - \dot{z_\mathrm{P}})\overrightarrow{u_z}}$$
PFD $$\boxed{m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{P}} + \overrightarrow{\mathrm{T}} + \overrightarrow{\mathrm{F}}}$$
5. Par projection du PFD, on obtient :
$$m\ddot{z_\mathrm{M}} = -mg - k(z_\mathrm{M} - z_\mathrm{P} - \ell_0) - h(\dot{z_\mathrm{M}} - \dot{z_\mathrm{P}})$$
D'après le changement de variables, on a $z_\mathrm{M} = z_\mathrm{eq} + \mathrm{Z} = \ell_0 - mg/k + \mathrm{Z}$. On en déduit :
$$m\ddot{z_\mathrm{M}} = -mg - k(-mg/k - z_\mathrm{P} + \mathrm{Z}) - h(\dot{z_\mathrm{M}} - \dot{z_\mathrm{P}}) = kz_\mathrm{P} - h(\dot{z_\mathrm{M}} - \dot{z_\mathrm{P}})$$
Par ailleurs, on remarque que $\dot{z_\mathrm{M}} = \dot{\mathrm{Z}}$ et $\ddot{z_\mathrm{M}} = \ddot{\mathrm{Z}}$.
Finalement $$\boxed{m\ddot{\mathrm{Z}} + h\dot{\mathrm{Z}} + k\mathrm{Z} = kz_\mathrm{P} + h\dot{z_\mathrm{P}}}$$
6. On divise par m pour mettre l'équation sous forme canonique et on identifie : ${\omega_0}^2 = k/m$ et $\omega_0/\mathrm{Q} = h/m$. On en déduit :
$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10 \text{ rad.s}^{-1} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Q} = \frac{\sqrt{km}}{h} = 0,5}$$
7. De $\mathrm{Z}(t)$, on associe $\underline{\mathrm{Z}}(t) = \mathrm{Z}_m e^{j\phi} e^{j\Omega t}$ et à $z_\mathrm{P}(t) = a\cos(\Omega t)$, on associe $\underline{z_\mathrm{P}}(t) = a e^{j\Omega t}$. On injecte ces formes complexes dans l'équation différentielle, pour obtenir :
$$\left((j\Omega)^2 + \frac{j\Omega\omega_0}{\mathrm{Q}} + {\omega_0}^2\right)\underline{\mathrm{Z_m}} = \left({\omega_0}^2 + \frac{j\Omega\omega_0}{\mathrm{Q}}\right) a$$
donc $$\underline{\mathrm{Z_m}} = \frac{1 + \dfrac{j\Omega}{\mathrm{Q}\omega_0}}{1 + \dfrac{j\Omega}{\mathrm{Q}\omega_0} + \left(\dfrac{j\Omega}{\omega_0}\right)^2} a$$

Finalement $$\boxed{Z_m = \sqrt{\frac{1+\left(\frac{\Omega}{Q\omega_0}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\left(\frac{\Omega}{Q\omega_0}\right)^2}}\,a}$$

8. Numériquement,

$$\boxed{u = \sqrt{\frac{1+0,04\Omega^2}{(1-0,01\Omega^2)^2+0,04\Omega^2}}}$$



Graphiquement, on note

$$\boxed{\Omega_r \simeq 7,0 \text{ rad.s}^{-1} \qquad \text{et} \qquad Z_{max} = a u_{max} \simeq 1,15\, a \simeq 4,6 \text{ cm}}$$

9. On se sert de la relation $\Omega = \dfrac{2\pi V_0}{\lambda}$ et on trouve

$$\boxed{V_{Or} \simeq 11,1 \text{ m.s}^{-1} \simeq 40 \text{ km.h}^{-1}}$$

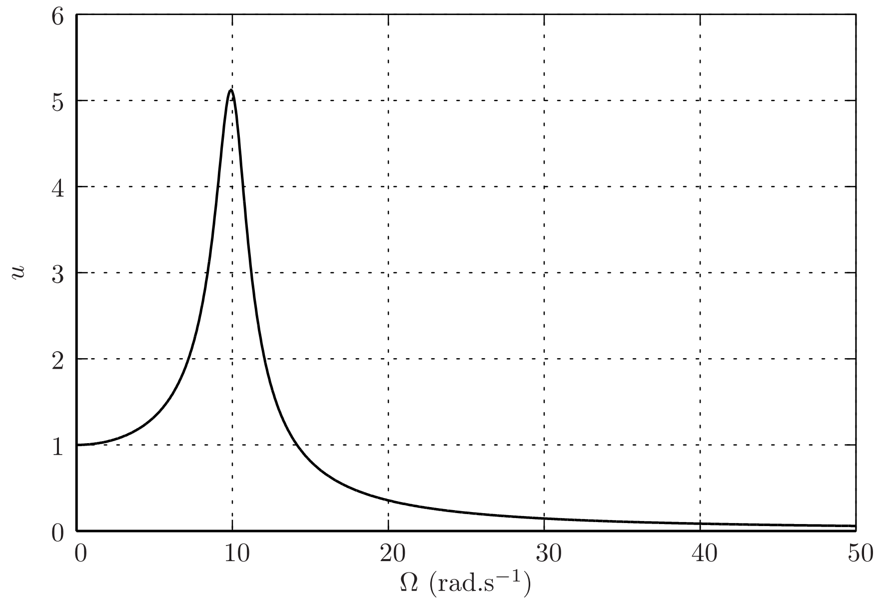
Il faut donc que le camion roule à une vitesse bien supérieure à 40 km.h^{-1} pour que les vibrations soient les plus faibles possibles.

10. h' étant dix fois plus petit que h, le facteur de qualité est donc multiplié par dix :

$$\boxed{Q' = 5}$$

11. On en déduit la nouvelle expression numérique de u :

$$\boxed{u = \sqrt{\frac{1+0,0004\Omega^2}{(1-0,01\Omega^2)^2+0,0004\Omega^2}}}$$



Graphiquement, on note

$$\boxed{\Omega'_{\mathrm{r}} \simeq 9,9 \text{ rad.s}^{-1} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Z'}_{\max} = a u_{\max} \simeq 5,1\, a \simeq 20,5 \text{ cm}}$$

12. On se sert de la relation $\Omega = \dfrac{2\pi \mathrm{V}_0}{\lambda}$ et on trouve

$$\boxed{\mathrm{V'}_{\mathrm{Or}} \simeq 15,8 \text{ m.s}^{-1} \simeq 56,7 \text{ km.h}^{-1}}$$

Il faut donc que le camion roule à une vitesse bien supérieure à 57 km.h^{-1} pour que les vibrations soient les plus faibles possibles.

13. On a $\Omega_{\mathrm{r}} < \Omega'_{\mathrm{r}} < \omega_0$. On retrouve le même comportement que pour un passe-bande d'ordre 2. La résonnance se situe avant ω_0 et est d'autant plus près que le facteur de qualité est élevé.