LMB *MPSI2*

Programme de colle de la semaine 17 - semaine du 3 février

Le cours doit être parfaitement su.

N.B. Cette semaine les exercices porteront uniquement sur le chapitre Algèbre linéaire. Les questions de cours porteront sur l'algèbre linéaire et/ou sur le début du chapitre Limites et continuité des fonctions réelles d'une variable réelle. Aucun exercice sur la continuité cette semaine.

Algèbre linéaire (sans dimension)

1 - Espaces Vectoriels, sous-espaces vectoriels

Selon le programme MPSI, K désigne un corps qui est soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$.

1. Espace vectoriel : Définition. Exemples fondamentaux.
   Espace de la géométrie vectorielle classique.
   Structure de K-ev de K^n pour $n \in \mathbb{N}$. Espace vectoriel des polynômes $\mathrm{K}[\mathrm{X}]$.
   Si F est un K-ev et X un ensemble (non vide), l'ensemble des applications de X dans F admet une structure de K-ev. Espaces de fonctions, de suites.
   Produit cartésien d'espaces vectoriels.
   Si K est un sous-corps de L, tout L-ev admet une structure de K-ev.
2. Sous-espace vectoriel : définition. Exemples : ex de sev de $\mathbb{R}^3$ défini par des équations ; $\mathrm{K}_n[\mathrm{X}]$ sev de $\mathrm{K}[\mathrm{X}]$; l'ensemble $\mathcal{B}$ des suites bornées, l'ensemble $\mathcal{C}$ des suites convergentes sont des sev de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$; $\mathcal{C}^0(\mathrm{I})$, $\mathcal{D}^1(\mathrm{I})$ et l'ensemble des fonctions solutions d'une EDL homogène (sur l'intervalle I) sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$.

   Combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs. Définition de $\mathrm{Vect}\ (\mathcal{F})$ sev engendré par une famille de vecteurs $\mathcal{F}$ de E comme l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{F}$.
   Familles génératrices d'un espace vectoriel. Exemples.

2 - Applications linéaires

1. Application linéaire : définition. Endomorphisme, isomorphisme, automorphisme d'espaces vectoriels. Forme linéaire. Exemples : exemple en géométrie, ex d'applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, la dérivation, homothéties.

   Prop : si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ l'image directe d'un sev E_1 de E par f est un sev de F et l'image réciproque d'un sev F_1 de F par f est un sev de E.
   Définition de l'image et du noyau. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité.
2. Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ (sev de $\mathcal{F}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$). La composée d'applications linéaires est linéaire. La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme. Cas particulier des endomorphismes d'un ev E : structure d'anneau de $(\mathcal{L}(\mathrm{E}), +, \circ)$.
   Groupe linéaire de E noté $\mathrm{GL}(\mathrm{E})$: groupe des automorphismes de E.

3 - Sommes, sommes directes, supplémentaires et projecteurs

1. Somme. Définition de la somme de deux sev.
2. Somme directe (définition : la somme $\mathrm{F} + \mathrm{G}$ est directe si la décomposition est unique).
   Caractérisation : $\mathrm{F} + \mathrm{G}$ est directe si et seulement si $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0_{\mathrm{E}}\}$.
3. Sous-espaces supplémentaires dans E. Exemples.
4. Somme et somme directe de $n \geq 3$ sev de E. Caractérisation par l'unicité de l'écriture du vecteur nul.
   Exercice du cours : si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$*, alors* $\ker(f)$, $\ker(f - \mathrm{Id})$ *et* $\ker(f - 2\mathrm{Id})$ *sont en somme directe.*
5. Projecteurs. Définition. Image, noyau. Caractérisation par $p \circ p = p$.
6. Symétries. Définition. Sous-espaces propres. Caractérisation par $s \circ s = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.
7. Si $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{E}_p$ une application linéaire de E dans un ev F est entièrement déterminée par ses restrictions aux sev E_i, c'est-à-dire que, pour $i \in [\![1, p]\!]$, si $u_i \in \mathcal{L}(\mathrm{E}_i, \mathrm{F})$, il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ tel que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ $f_{|\mathrm{E}_i} = u_i$.

4 - Formes linéaires et hyperplans

1. Def : Un hyperplan H de E est un sev de E admettant une droite comme supplémentaire.
   Pté : si $\overrightarrow{a} \notin \mathrm{H}$ hyperplan, alors $\mathrm{E} = \mathrm{H} \oplus \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{a})$.
2. Toute forme linéaire non nulle est surjective.
3. H sev de E est un hyperplan ssi H est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Exemples.
4. Deux formes linéaires non nulles ont même noyau si et seulement si elles sont proportionnelles.

Questions de COURS

1. Si $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ alors $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\,(f(\mathcal{F}))$ *(Démonstration à écrire dans le cas où $\mathcal{F}$ est une famille finie).*

   + Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire par le noyau.
2. Exo : si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, et si $(\lambda_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont des scalaires 2 à 2 distincts alors les sous-espaces $(\ker(f - \lambda_i \mathrm{Id}))_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont en somme directe.
3. Si $p \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ vérifie $p \circ p = p$ alors $\mathrm{E} = \ker(p) \oplus \ker(p - \mathrm{Id})$ et p est la projection de E sur $\ker(p - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\ker p$.
   Ou bien : Si $\sigma \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ vérifie $\sigma^2 = \mathrm{Id}$ alors $\mathrm{E} = \ker(\sigma - \mathrm{Id}) \oplus \ker(\sigma + \mathrm{Id})$ et σ est une symétrie vectorielle.
4. Toute forme linéaire non nulle est surjective.
5. Si H est un hyperplan de E et si $a \notin \mathrm{H}$ alors $\mathrm{E} = \mathrm{H} \oplus \mathrm{Vect}\,(a)$

   Uniquement des questions de cours sur le chapitre Limites et Continuité cette semaine
6. Savoir écrire la définition de $\lim f_a = \ell$ (avec des quantificateurs) dans un cas de figure choisi par l'examinateur (a fini ou non, ℓ fini ou non).

   + Une fonction ayant une limite finie en $a \in \bar{\mathbb{R}}$ est bornée au voisinage de a.

   ou Une fonction de limite $\ell > 0$ en a est de signe positif au voisinage de a.
7. Th d'opération sur les limites : pour $g \circ f$.
8. Démontrer que deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui coïncident sur une partie dense de $\mathbb{R}$ sont égales sur $\mathbb{R}$.
9. (Exo) Si f est une fonction périodique ayant une limite finie en $+\infty$ alors f est constante.
   Ou Si f est continue en 0 et vérifie $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$ alors f est constante.

PRÉVISIONS : Limites et Continuité des fonctions réelles d'une variable réelle.