Programme de colle de la semaine n°18 : 10 février

Le cours doit être parfaitement su.

Limites et continuité d'une fonction d'une variable réelle, à valeurs dans $\mathbb{R}$

1-Limites

1. Définition des limites. Unicité. Une fonction ayant une limite finie en a est bornée au voisinage de a. Caractérisation séquentielle de la limite.
   Opérations classiques (combinaison linéaire, produit, inverse, quotient, composition).
2. Limite à gauche, limite à droite.
3. Limite et ordre sur $\mathbb{R}$. Passage à la limite dans des inégalités (larges), théorèmes d'encadrement.
4. Théorème d'existence des limites à droite et à gauche pour les fonctions monotones.

2-Continuité

1. Définition. Continuité en un point et sur un intervalle.
   Opérations classiques.
2. Prolongement par continuité.
3. Théorème des valeurs intermédiaires, l'image d'un intervalle par une application réelle continue est un intervalle. Généralisation du TVI : si f continue sur un intervalle d'extrémités a, b, si f admet des limites (dans $\bar{\mathbb{R}}$) en a et b alors tout réel y strictement compris entre ces deux limites est dans $f(\mathrm{I})$.
   Corollaire : image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone.
4. Si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ fonction continue et injective sur l'intervalle I alors f est strictement monotone sur I.
5. Théorème de la bijection monotone. Continuité de l'application réciproque.
6. Théorème de compacité : toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ est bornée et atteint ses bornes.
   L'image d'un segment par une application continue est un segment.

Questions de COURS ou Savoir-Faire :

1. Th d'opération sur les limites : pour $g \circ f$.
2. Démontrer que deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui coïncident sur une partie dense de $\mathbb{R}$ sont égales sur $\mathbb{R}$.
3. Démonstration du théorème des valeurs intermédiaires (par dichotomie)
4. Utiliser la définition des limites et le théorème des valeurs intermédiaires pour justifier que si f est continue sur $]a, b[$ et admet en a et b des limites, non nulles et de signe opposés alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.
5. Si f est continue et injective sur un intervalle I, alors f est strictement monotone.
6. Théorème de compacité : si f est continue sur un segment $[a, b]$ alors f est bornée et atteint ses bornes.
7. (Exo)
   Soit f est continue sur $\mathbb{R}_+$, on pose pour $x > 0$ $\mathrm{F}(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.
   a) Si $\lim f = 0$, alors F tend vers 0 en $+\infty$. b) Si $\lim f = \ell \in \mathbb{R}$, alors F tend vers ℓ en $+\infty$.
8. (Exo). Si f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$ alors f est bornée.
9. (Exo) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Montrer que f est minorée et qu'elle atteint sa borne inférieure.

PRÉVISIONS : **Polynômes.**