

Programme de colle de la semaine n°19 - semaine du 3 mars

Le cours doit être parfaitement su.

Révision

Exercices sur le chapitre Nombres complexes (calcul en lien avec les calculs fréquemment trouvés dans les exercices des polynômes : **racines n ième de l'unité, techniques de calcul (angle moitié, factorisation, etc), trigonométrie.**

Polynômes à une indéterminée

1) L'algèbre $K[X]$ (dans le cours K est un sous-corps de \mathbb{C})

- Définition formelle : construction par les suites à support fini. Opérations : +, ., \times .
Structure : $(K[X], +, \times)$: anneau des polynômes, intègre.
Notation définitive $X = (0, 1, 0, 0, \dots)$.
Propriétés des degrés (somme, produit).
- Substitution par un élément $x \in A$ si A est une K -algèbre. Exemple avec $A = K$: , avec $A = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, avec $A = \mathcal{L}(E)$ (polynômes d'endomorphismes), avec $A = M_n(K)$, avec $A = K[X]$.

2) Arithmétique dans $K[X]$

- Relation de divisibilité. Polynômes associés.
Division euclidienne dans $K[X]$. Si $B \neq 0$, existence et unicité du couple (Q, R) vérifiant $A = BQ + R$, avec $\deg(R) < \deg(B)$.
- PGCD. Calcul du pgcd par l'algorithme d'Euclide.
- Relation de Bezout. Lemme de Gauss.
- ppcm.
- Polynômes irréductibles. Décomposition d'un polynôme en produit d'irréductibles.

3) Racines et factorisation

- Racines simples, racines multiples. Définition de l'ordre de multiplicité d'une racine.
Factorisation de P par $(X - \alpha_1)^{n_1} \dots (X - \alpha_r)^{n_r}$, si les scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont racines de P d'ordres n_1, \dots, n_r . Majoration du nombre de racines (comptées avec leur multiplicité) par le degré.
Polynômes scindés, scindés à racines simples.
- Polynôme dérivé : définition formelle. Opérations et dérivation.
Dérivée n -ième. Linéarité, formule de Leibniz (dérivée de $(PQ)^{(n)}$), formule de Taylor pour les polynômes.
- Caractérisation de l'ordre de multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés.

4) Factorisation dans \mathbb{C} et dans \mathbb{R}

Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$. Théorème fondamental de l'algèbre (admis) : tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant est scindé. Liste des polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ (polynômes de degré 1 et de degré 2 sans racine réelle), forme factorisée.

5) Relations coefficients racines

Fonctions symétriques élémentaires des racines d'un polynôme scindé. Lien avec les coefficients.

QUESTIONS ou EXOS de COURS :

- (exo) Soit $k, n, m \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{i+j=k} \binom{n}{i} \binom{m}{j} = \binom{n+m}{k}$.
Indication : $(1+X)^{n+m} = (1+X)^n(1+X)^m$. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$
- (exo) On note Δ l'application qui à $P \in K[X]$ associe $\Delta(P) = P(X+1) - P$.
 - Montrer que Δ est un endomorphisme de l'ev $K[X]$.
 - Déterminer pour $P \in K[X]$ le degré de $\Delta(P)$ en fonction du degré de P .
 - Déterminer $\ker \Delta$.
- (exo Polynômes de Lagrange) Soit K un corps (qui est \mathbb{R} ou \mathbb{C}) et a_0, a_1, \dots, a_n $n+1$ scalaires deux à deux distincts.
 - On considère $\varphi : \begin{cases} K[X] & \longrightarrow & K^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(a_0), \dots, P(a_n)) \end{cases}$. Montrer que φ est une application linéaire et déterminer son noyau.
 - Démontrer que la restriction φ_n , de φ à $K_n[X]$ est injective.
 - Expliciter pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, un polynôme L_i de $K_n[X]$ tel que $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_i(a_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.
Justifier que ces polynômes L_0, \dots, L_n sont uniques dans $K_n[X]$.
 - Soit $b = (b_0, \dots, b_n) \in K^{n+1}$. Montrer que le polynôme $\sum_{i=0}^n b_i L_i$ est l'unique polynôme P de $K_n[X]$ vérifiant $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_i) = b_i$.
 - Soit $b = (b_0, \dots, b_n) \in K^{n+1}$. Résoudre l'équation $\varphi(P) = b$ d'inconnue $P \in K[X]$.
- Écrire la formule de Taylor (sans démo). Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les dérivées successives. (Énoncé et démo)
- Pour $P = (X-a)^n Q$ où $Q \in K[X]$, expression de $P^{(n)}(a)$ en fonction de $Q(a)$ (soit en utilisant la formule de Taylor (à privilégier), soit en appliquant la formule de dérivation de Leibniz à $U = (X-a)^n$ et $V = Q$ en remarquant que a est racine d'ordre n de U).
 - Application : Si $P = (X^2 - 1)^n$, déterminer $P^{(j)}(\pm 1)$ pour $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Préciser aussi $P^{(2n)}$.
- Écrire les relations coefficients/racines pour un polynôme scindé de degré n . On exigera d'écrire les formules pour σ_1, σ_2 avant d'écrire σ_k et on demandera de préciser le cas particulier de σ_n . Si $(x_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ sont les racines, savoir (par exemple) calculer $\sum_{i=1}^n x_i^2$ à l'aide des fonctions symétriques élémentaires des x_i puis en fonction des coefficients du polynôme.
- (exo) Soit $n \geq 2$. On définit le polynôme P_n dans $\mathbb{C}[X]$ par : $P_n = (X+1)^n - (X-1)^n$
 - Factoriser P_n dans $\mathbb{C}[X]$
 - En déduire pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ la valeur de : $\sum_{k=1}^p \cot^2 \left(\frac{k\pi}{2p+1} \right)$ et $\prod_{k=1}^p \cot \left(\frac{k\pi}{2p+1} \right)$
- (exo) Soit $P \in K[X]$. 1) Si P et P' sont premiers entre eux, alors les racines de P sont simples. 2) si $K = \mathbb{C}$ la réciproque est vraie.

Bonnes vacances !

PRÉVISIONS : Espaces vectoriels de dimension finie.