Programme de colle - semaine 20 - 10 mars

Le cours doit être parfaitement su.

Algèbre linéaire : la théorie de la dimension finie

1- Familles libres, familles génératrices, bases

1. Familles génératrices (rappel).
2. Familles libres, familles liées. Des exemples : dans $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, les familles de polynômes de degré échelonnés sont libres dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
3. Bases. Coordonnées d'un vecteur dans une base.
4. Famille génératrice d'une somme de sev, famille libre d'une somme directe, base d'une somme directe par concaténation de bases, caractérisation d'une somme directe.

2 - Théorie de la dimension

1. Théorème de la base incomplète. Conséquence : en dimension finie ($\mathrm{E} \neq \{0\}$), existence d'une base finie.
2. Dimension d'un ev. Exemples : K^n, $\mathrm{K}_n[\mathrm{X}]$, bases canoniques de ces espaces vectoriels, $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}$ et $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.
   Si $\dim \mathrm{E} = n$, les familles libres de E ont au plus n vecteurs et les familles génératrices de E ont au moins n vecteurs.
   Caractérisation des bases en dimension finie : si E de dimension n, toute famille libre (respectivement génératrice) de E ayant n vecteurs est une base de E.
3. Dimension de $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$
4. Si E de dim finie, un sev F est de dimension avec $\dim \mathrm{F} \leq \dim \mathrm{E}$. De plus si $\dim \mathrm{F} = \dim \mathrm{E}$, alors $\mathrm{F} = \mathrm{E}$.
   Dimension d'une somme $\mathrm{F} + \mathrm{G}$ (formule de Grassmann) (preuve géométrique par construction d'une base.)
   Caractérisation des supplémentaires en dimension finie.
   Propriété : Si $\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_n$ sont n sev de E, tous de dimension finie, $\dim(\sum \mathrm{F}_i) \leq \sum \dim \mathrm{F}_i$ avec égalité si et seulement si $\sum \mathrm{F}_i = \oplus \mathrm{F}_i$
   Existence de supplémentaires en dimension finie.

3 - Dimension finie et applications linéaires

Dans ce paragraphe, $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et E et/ou F sont de dimensions finies (selon les cas).

1. L'image d'une famille libre de E par une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ injective est une famille libre dans F. Détermination de $\mathrm{Im} f$ à partir d'une famille génératrice de E. Caractérisation des isomorphisme par l'image d'une base.
2. Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est entièrement déterminée par la donnée des vecteurs de $f(\mathcal{B})$ si $\mathcal{B}$ est une base de E.
3. Dimension de $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. Exemple de base de E^*, base duale d'une base de E. *NB : je n'ai pas donné de bases de $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, j'attends l'écriture matricielle pour cela.*
4. si E de dim finie , E est isomorphe à F ssi F est de dimension finie égale à celle de E. Isomorphisme entre un ev de dimension n et K^n si une base de E est fixée.
5. Théorème du rang : Si E est un ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.
   1) La restriction de f à un supplémentaire G du noyau réalise un isomorphisme de G sur Im f
   2) $\dim \mathrm{E} = \dim \ker f + rgf$
6. Injectivité. Caractérisation par $\mathrm{rg}\, f = \dim \mathrm{E}$ ou $\dim \ker f = 0$
7. Surjectivité : caractérisation avec $\mathrm{rg}\, f = \dim \mathrm{F}$
   Comparaison des dimensions de E et F si f injective, surjective ou bijective.

8. Caractérisation des isomorphismes en dimension finie.
   Théorème : si $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{F}$ (finie), une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est injective ssi elle est bijective ssi elle est surjective.
   En particulier : pour un endomorphisme en dimension finie : injectivité équivaut à surjectivité.
   Exercice : si E et F sont deux ev de même dimension finie, si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{E})$ vérifient $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ alors f est un isomorphisme de réciproque g.

N.B. nous n'avons pas encore abordé les calculs effectifs de rangs (avec les matrices). Pas de questions sur ces notions cette semaine.

QUESTIONS DE COURS : Tout énoncé d'un résultat du cours sur la dimension finie. Pour les démos :

1. Liberté dans le $\mathbb{C}$-ev des fonctions $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ de la famille $(f_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ si $f_i : t \mapsto t^i e^t$.
   Justifier que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est de dimension infinie.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $(\lambda_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ des scalaires deux à deux distincts. Montrer que les sous-espaces $(\ker(f - \lambda_i \mathrm{id}))_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont en somme directe.
   En déduire que si $\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_n}$ sont des vecteurs non nuls tels que $f(\overrightarrow{x_i}) = \lambda_i \overrightarrow{x_i}$, la famille $(\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_n})$ est libre dans E.
3. *Exercice :* Soit E un K-ev de dimension n, et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme nilpotent de E c'est-à-dire qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^m = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$. On note r le plus petit entier naturel qui vérifie $f^r = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.
   (a) Justifier qu'il existe x_0 dans E tel que la famille $\mathcal{B}_0 = (x_0, f(x_0), \cdots, f^{r-1}(x_0))$ est libre dans E.
   (b) En déduire que $r \leq n$ puis que $f^n = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.
4. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.
   Si f est injective, l'image d'une famille libre de E par f est une famille libre de F.
   Si $\mathcal{B}$ est une base de E, f est un isomorphisme si et seulement si $f(\mathcal{B})$ une base de F.
   NB : on se contentera de demander les preuves quand les familles de vecteurs (génératrices, libres ou bases) sont finies.
5. Si F et G sont deux sev de dimension finie d'un ev E, dimension de $\mathrm{F} + \mathrm{G}$ (démo par construction d'une base)
6. Théorème du rang.
7. Équivalence entre injectivité, bijectivité et surjectivité pour une application linéaire entre deux espaces vectoriels E et F de même dimension finie *(explications au choix de l'élève : soit à partir du théorème du rang, soit à partir des connaissances sur l'image d'une base par une application linéaire injective, ou surjective ou bijective.)*
   + *Exercice* : si E et F sont deux ev de même dimension finie, si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{E})$ vérifient $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ alors f est un isomorphisme de réciproque g.
8. *Exo*. Soit $\varphi_n : \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}(\mathrm{X})$
   Justifier que φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et déterminer son noyau puis son image.

PRÉVISIONS : **calculs de rangs (pivot de Gauss sur la matrice d'une famille de vecteurs), équation d'un hyperplan. Puis chapitre Dérivation**