Programme de colle semaine n° 21 - semaine du 17 mars

Le cours doit être parfaitement su.

N.B. Cette semaine les exercices pourront encore porter sur la dimension finie. La dérivation sera encore au programme de colle de la semaine prochaine.

Dimension finie

Tout exercice sur le chapitre (en particulier théorème du rang et conséquences. Voir programme précédent). Vu cette semaine :

1. Hyperplans et formes linéaires en dimension finie. Équation cartésienne d'un hyperplan relativement à une base.
2. Rang d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire. Invariance par composition avec un isomorphisme.
3. Matrice d'une famille de p vecteurs $\mathcal{F}$, relativement à une base $\mathcal{B}$, notée $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$. Le rang de $\mathcal{F}$ est égal au rang des p vecteurs colonnes de $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.
4. Le rang d'une matrice échelonnée par colonnes est égal au nombre de colonnes non nulles.
5. Opérations élémentaires sur les colonnes préservant le rang. *On a admis que les opérations élémentaires pouvaient aussi s'effectuer sur les lignes, on le démontrera dans le cours sur les matrices.*
6. Algorithme du pivot de Gauss pour le calcul du rang.

Dérivation (le tout début)

1 - Dérivabilité d'une fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1. Dérivabilité en un point. Équivalence avec l'existence d'un développement limité à l'ordre 1.
2. Opérations classiques : dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, de l'inverse, d'une composée. Idem pour la dérivée n-ième, et formule de Leibniz pour la dérivée n ième d'un produit.
3. Dérivabilité d'une fonction réciproque. Critère de $\mathcal{C}^n$ difféomorphisme pour une bijection entre deux intervalles réels.

2 - Théorèmes de Rolle, des accroissements finis

1. Si f fonction réelle, dérivable sur un intervalle I admet un extremum local en x_0 un point intérieur à I, alors $f'(x_0) = 0$.
2. Théorème de Rolle (pour f réelle). Égalité des accroissements finis pour les fonctions réelles. CEX pour f à valeurs complexes
   Inégalité des accroissements finis (pour f réelle ou complexe). *Résultat admis provisoirement concernant les fonctions complexes, la démo sera faite dans le chapitre intégration).*

   Remarque : si f est continue sur $[a, b]$ à dérivée bornée sur $]a, b[$ (en particulier si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a, b]$), alors f est $k-$lipschitzienne sur $[a, b]$ (avec $k = \sup\limits_{t \in]a,b[} |f'(t)|$).

   Applications du théorème des accroissements finis :
   — pour f réelle : lien entre monotonie et signe de la dérivée sur un intervalle.
   — sur des exemples : étude d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$, utilisation du TAF et approximation de a point fixe de f. (Exemple traité $u_{n+1} = e^{-u_n^2/2}$)

   N.B. Le chapitre n'est pas fini. Seront vus la semaine prochaine : limite d'une dérivée, inégalité de Taylor-Lagrange, Convexité. Merci de ne pas interroger sur ces notions dès cette semaine (ni sur des suites récurrentes, sauf si fonction contractante).

QUESTIONS DE COURS :

1. si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ avec E et F ev de dimensions finies, si $\varphi : \mathrm{E}' \to \mathrm{E}$ et $\phi : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ sont des isomorphismes, on a $\mathrm{rg}\,(f \circ \varphi) = \mathrm{rg}\,(f)$ et $\mathrm{rg}\,(\phi \circ f) = \mathrm{rg}\,(f)$
2. Dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^4$, on note $u_1 = (1, 2, 2, 3), u_2 = (2, 0, 1, 2)$ deux vecteurs de E et $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2)$. Déterminer la dimension de F et déterminer les équations de F (dans la base canonique).
3. Pour $f(x) = x^3 \sin(x)$, expression de la dérivée n-ième de f.
   Et/ou Pour $g(x) = x^{n-1} \ln x$, expression de la dérivée n ième de g.
4. Si I est un intervalle et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ dérivable en x_0 admettant un maximum local en x_0 avec x_0 à l'intérieur de I, alors $f'(x_0) = 0$ (démo).
5. Théorème de Rolle : énoncé et démo ;
6. *Exercice* : Montrer que si $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ est un polynôme scindé, alors P' est également scindé.
7. *Exercice* : $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$. *Graphe et existence d'un point fixe dans* $\mathbb{R}_+$ *déjà vu.*
   (a) Montrer que f est contractante sur $\mathbb{R}_+$
   (b) Établir que la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ est convergente vers a.
8. À l'aide du théorème des accroissements finis,
   (a) Montrer que $\forall u \in \mathbb{R}, |e^u - 1| \leq |u|e^{|u|}$
   (b) Majorer l'erreur commise en prenant 100 comme valeur approchée de $\sqrt{10001}$.

PRÉVISIONS : Fin du chapitre Dérivation (Limite d'une dérivée, Inégalité de Taylor-Lagrange, inégalités de convexité). Étude pratique des suites récurrentes.