Programme de colle semaine n° 22 - semaine du 24 mars

Le cours doit être parfaitement su.

Dérivation d'une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes

Pour une fonction à valeurs réelles : **Théorèmes de Rolle, égalité des accroissements finis**.

Pour une fonction à valeurs réelles ou complexes : **inégalité des accroissements finis, inégalité de Taylor-Lagrange** (admis à ce stade de l'année).

Applications : monotonie d'une fonction réelle sur un intervalle, **théorème sur la limite d'une dérivée**.

Fonctions réelles convexes sur un intervalle de $\mathbb{R}$: définition puis interprétation géométrique : la courbe de f est située en dessous de ses cordes. Inégalité de Jensen.

Croissance des pentes des cordes dont une extrémité est fixée. Inégalité des trois cordes.

Convexité et dérivabilité : si f est convexe et dérivable en x_0, la courbe de f est située au-dessus de sa tangente en x_0. Pour une fonction f dérivable, f est convexe ssi f' est croissante. Pour f deux fois dérivable, f est convexe ssi f'' est positive.

Inégalités classiques de convexité.

2- Étude pratique de suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Représentation graphique : courbe de f, droite $y = x$. Détermination d'un intervalle stable par f contenant u_0 (et donc tous les termes de la suite) et sur lequel les propriétés utiles (position relative par rapport à $y = x$ ou monotonie de f ou caractère contractant) sont vérifiées.

Résultats vus en cours :

1. Définition de la suite : recherche d'une partie $\mathrm{I} \subset \mathcal{D}_f$ stable par f contenant u_0.
2. Si u converge vers ℓ et f continue en ℓ, lien entre points fixes de f et limite de u.
3. Cas où $x \mapsto f(x) - x$ est de signe constant sur un intervalle stable par f et contenant u_0.
4. Cas où f est contractante ((k-lipschitzienne avec $k \in [0, 1[$)) sur un intervalle I stable par f et contenant u_0 et un point fixe ℓ.
5. Cas où f est croissante sur un intervalle I contenant tous les u_n : u est monotone, le sens de monotonie se détermine par la comparaison de u_0 et u_1.
6. Cas où f est décroissante sur un intervalle contenant tous les u_n : monotonie des suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

N.B. La méthode de Newton, les notions de vitesse de convergence quadratique feront l'objet d'un TD. Les notions de points fixes attractifs $|f'(\ell)| < 1$ ou répulsifs $|f'(\ell)| > 1$) seront vus en exercice, mais ne sont pas des résultats de référence de cours.

QUESTIONS DE COURS :

1. *Exercice* : domaine de définition et étude de la dérivabilité de $f(x) = \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$
2. *Exercice :* soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = e^{-1/x^2}$.
   (a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que
   $$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \mathrm{P}_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}$$
   (b) Montrer que f admet un prolongement en 0 qui définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
3. Écrire l'inégalité de Taylor-Lagrange pour $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b], \mathbb{C})$ puis prouver l'une des 3 inégalités choisies par le colleur :
   - $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$.
   - $\forall z \in \mathbb{C}, e^z = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{z^k}{k!}$ (avec $f : [0,1] \to \mathbb{C}, t \mapsto e^{tz}$)
   - pour $x \in [0,1],\ \ln(1+x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$.
4. Inégalité de convexité. Justifier les inégalités suivantes :
   (a) $\forall x \in [0, \pi/2],\ \dfrac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x$
   (b) $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n,\ \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leq \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$.
   (c) $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2, \arctan(x) + \arctan(y) \leq 2\arctan\left(\frac{x+y}{2}\right)$

   Dans les questions suivantes, I *désigne un intervalle réel,* f *définie sur* I *à valeurs dans* I *et* u *une suite récurrente définie par* $u_0 \in \mathrm{I}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
5. Justifier que si $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$ et $u_0 \in \mathrm{I}$ et si f est croissante sur I, alors u est monotone. *À traiter en exemple :* $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ *avec* $u_0 \geq -1$*, convergence de* u.
6. *À partir de mercredi, exercice (on donnera l'énoncé à l'élève)* Soit $f : \mathrm{I} \to \mathrm{I}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I et $\ell \in \mathrm{I}$ un point fixe de f. Soit $u_0 \in \mathrm{I}$ et u la suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. La suite est bien définie car $f(\mathrm{I}) \subset$.
   (a) On suppose $|f'(\ell)| < 1$.
   Montrer qu'il existe un intervalle de la forme $\mathrm{J} = [\ell - \eta, \ell + \eta]$ avec $\eta > 0$ tel que $\mathrm{J} \cap \mathrm{I}$ est stable par f et pour lequel, s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \in \mathrm{J} \cap \mathrm{I}$, la suite u converge vers ℓ.
   Si de plus $f'(\ell) = 0$, et f de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, justifier $(u_{n+1} - \ell) = \mathrm{O}(u_n - \ell)^2$
   (b) Si $|f'(\ell)| > 1$, démontrer que la suite récurrente u est soit stationnaire à ℓ, soit elle ne converge pas vers ℓ.

PRÉVISIONS : **suites récurrentes linéaires d'ordre 2, Matrices**