LMB *MPSI2*

Programme semaine 23 - semaine du 31 mars

Le cours doit être parfaitement su.

Matrices

A - Matrices : structure

1. Définition. Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathrm{K})$, dimension. Base : matrices élémentaires
2. Transposition. Matrices symétriques et antisymétriques.
3. Produit matriciel. Propriétés. Structure d'anneau pour $\mathcal{M}_n(\mathrm{K})$ (non commutatif, ayant des diviseurs de zéro). Sous-anneau des matrices diagonales, des matrices triangulaires supérieures.
4. Trace d'une matrice carrée et propriété $\mathrm{tr}(\mathrm{AB}) = \mathrm{tr}(\mathrm{BA})$ pour $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$.
5. Puissances et inverse éventuel d'une matrice carrée. Inverse d'un produit de matrice carrées inversibles. Groupe linéaire d'ordre n. *Nous n'avons pas encore abordé le calcul effectif d'un inverse de matrice.*

B - Matrices, applications linéaires (sans changements de bases cette semaine)

1. Matrice d'une application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ relativement à deux bases $\mathcal{B}_\mathrm{E}$ et $\mathcal{B}_\mathrm{F}$ de E et de F.
   Si E et F sont des K-ev de dim n et p, isomorphisme d'ev entre $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $\mathcal{M}_{p,n}(\mathrm{K})$ (des bases de E et F étant fixées).
2. Écriture de $y = u(x)$ sous forme matricielle : $\mathrm{Y} = \mathrm{AX}$ si $\mathrm{A} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_\mathrm{E}, \mathcal{B}_\mathrm{F}}(u)$, X matrice colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{B}_\mathrm{E}$ et Y matrice colonne des coordonnées de y dans $\mathcal{B}_\mathrm{F}$.
   Matrice d'une composée d'applications linéaires.
   Lien entre matrice inversible et isomorphisme.

QUESTIONS DE COURS ou exo de cours :

1. Donner, sans démonstration, la matrice produit de deux matrices élémentaires $\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_{k,\ell}$ lorsque $\mathrm{E}_{i,j} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathrm{K})$ et $\mathrm{E}_{k,\ell} \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathrm{K})$ Propriété de la trace : si $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathrm{K})$ et $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_{p,n}(\mathrm{K})$, on a $\mathrm{tr}(\mathrm{AB}) = \mathrm{tr}(\mathrm{BA})$.
   En déduire que si $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ et $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$, on a $\mathrm{tr}(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}) = \mathrm{tr}(\mathrm{A})$
2. Les ensembles $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ des matrices symétriques et anti-symétriques sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathrm{K})$ supplémentaires. Préciser une base et la dimension de $\mathcal{S}_n$.
3. Base et dimension des sevs suivants $\mathrm{H}_n = \{\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K}), \mathrm{tr}(\mathrm{A}) = 0\}$, $\Delta_n = \{\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K}), \forall i \in [\![1, n]\!],\ a_{i,i} = 0\}$
4. Si f est un projecteur de E (avec $\dim \mathrm{E} = n$), il existe une base de E dans laquelle $\mathcal{M}_\mathcal{B}(f) = \mathrm{Diag}(1, \cdots, 1, 0, \cdots 0)$ et/ou si$g$ est une symétrie vectorielle de E, il existe une base de E dans laquelle $\mathcal{M}_\mathcal{B}(g) = \mathrm{Diag}(1, \cdots, 1, -1, \cdots - 1)$
5. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, $x \in \mathrm{E}$ et $\mathrm{A} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_\mathrm{E}, \mathcal{B}_\mathrm{F}}(u)$ où $\mathcal{B}_\mathrm{E}$ et $\mathcal{B}_\mathrm{F}$ sont des bases de E et de F. Démontrer que les coordonnées du vecteur $u(x)$ dans la base $\mathcal{B}_\mathrm{F}$ sont données par la colonne AX où $\mathrm{X} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_\mathrm{E}}(x)$.
6. Expliquer les caractérisations suivantes des matrices inversibles parmi les matrices de $\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$:
   — matrice d'un isomorphisme,
   — ou matrice de rang n
   — ou matrice A vérifiant $\forall \mathrm{X}$ vecteur colonne, $(\mathrm{AX} = 0 \implies \mathrm{X} = 0)$
   — ou s'il existe $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ tel que $\mathrm{AB} = \mathrm{I}_n$
   — ou s'il existe $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ tel que $\mathrm{BA} = \mathrm{I}_n$
7. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathrm{K})$ de rang r. On appelle φ l'application linéaire canoniquement associée à A.
   Expliquer ce que cela veut dire.
   CNS sur r pour que φ soit injective, CNS sur r pour que φ soit surjective.
8. *Exo* : on note pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Justifier que $\forall(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{R}(\theta + \theta') = \mathrm{R}(\theta)\mathrm{R}(\theta')$. Justifier que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathrm{R}(\theta)$ est inversible et donner $\mathrm{R}(\theta)^{-1}$; préciser $\mathrm{R}(\theta)^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

PRÉVISIONS : Changements de bases, matrices équivalentes, semblables. Système linéaires.