Programme de colle semaine n°25 - 28 avril

Le cours doit être parfaitement su.

A) Systèmes linéaires

1. Définition. Interprétation matricielle. Vocabulaire : second membre, inconnues, solutions, matrice d'un système linéaire, rang, système homogène, système compatible. Systèmes de Cramer.
2. Systèmes équivalents. Opérations élémentaires sur les lignes. Méthode du pivot de Gauss.
3. Structure de l'ensemble des solutions du système homogène : sev de K^n de dimension $n-r$ où n est le nombre d'inconnues et r le rang du système.
   Structure affine de l'ensemble des solutions du système non homogène.
   Condition de compatibilité d'un système linéaire à l'aide du rang de $(\mathrm{C}_1, ..., \mathrm{C}_n, b)$ où C_j désigne le j ème vecteur colonne de la matrice du système et b le second membre du système.
4. Si $\dim \mathrm{E} = n$, tout sev vectoriel strict F de E de dimension $p \geq 1$ est l'intersection de $n-p$ hyperplans de E.

Tout exercice utilisant : **représentation matricielle d'une application linéaire, changement de bases, systèmes linéaires.**

B) Ensembles finis et dénombrement

1) Résultats sur les applications entre ensembles finis

si E est un ensemble fini et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ alors $f(\mathrm{E})$ est fini et $|f(\mathrm{E})| \leq |\mathrm{E}|$ avec égalité ssi f est injective. Si f est injective alors $|\mathrm{E}| \leq |\mathrm{F}|$; si f est surjective, $|\mathrm{E}| \leq |\mathrm{F}|$; si f est bijective alors $|\mathrm{E}| = |\mathrm{F}|$.

Si $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ avec E et F finis et de même cardinal, on a : (f injective $\iff$ f bijective $\iff$ f surjective).

2) Résultats de dénombrement

Cardinal de la réunion de deux ensembles finis (disjoints ou non).
Cardinal d'un produit cartésien d'ensembles finis.
Principe des bergers. Principe des tiroirs.

Nombre d'applications entre deux ensembles finis. Nombre de parties d'un ensemble à n éléments. Nombre de permutations d'un ensemble à n éléments. Nombre de p-liste (ou p-uplet) d'éléments deux à deux distincts de E (ou p-arrangement d'éléments de E). Nombre d'applications injectives entre deux ensembles finis.
Le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments est noté $\binom{n}{p}$. Expression de $\binom{n}{p}$ (démonstration combinatoire). Propriétés des coefficients du binôme : symétrie, relation de Pascal et formule du binôme (démonstration combinatoire des propriétés).

Méthodes : construction d'une bijection avec un ensemble de cardinal connu, bijection non formelle autorisée avec description d'un "identifiant" puis utilisation des mots clés du cours : p-uplet, ou p- arrangement ou permutation ou sous-ensemble à p éléments; représentation par un arbre de sélection; décomposition de l'ensemble en une partition d'ensembles dont les cardinaux sont connus; utilisation du principe des bergers.

C) Exercices sur les développements limités

en prévision du cours "Séries", révision des DL. Vous pouvez poser n'importe quel exercice sur le sujet. Cela peut être juste un calcul d'équivalent, ou un calcul de limite.

QUESTIONS DE COURS ou exo de cours : Pour tous au moins un D.L d'une fonction usuelle à écrire (par coeur) sans démonstration (note $\leq 9/10$ si DL non su) + une Question de cours ou un Exo de révision :

1. *Systèmes linéaires* : si la matrice du système linéaire est $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{m,\ell}(\mathrm{K})$ de rang r, donner (en expliquant) la dimension du sous-espace vectoriel des solutions du système homogène. Expliquer la structure (affine) de l'ensemble des solutions du système non homogène.

2. (a) Montrer que $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est semblable à $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

   (b) Expression de T^n pour $n \in \mathbb{N}$ et décrire la méthode donnant A^n (sans expliciter les coefficients)

   (c) Décrire la méthode permettant d'expliciter les suites u, v et w définies par la donnée de u_0, v_0, w_0 et la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = & 3u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = & -2u_n \quad\quad - 2w_n \\ w_{n+1} = & 2u_n + v_n + 2w_n \end{cases}$$

3. Cardinal de $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ si E ensemble fini.
4. Nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments (démo combinatoire).
5. Exo (formule de Van Der Monde) pour $n, p \in \mathbb{N}$, démontrer $\binom{n+m}{p} = \sum_{i+j=p} \binom{n}{i}\binom{m}{j}$
6. Exo : On considère une urne remplie de N boules numérotées de 1 à N. On effectue n tirages successifs avec remise. La suite des numéros obtenus constitue le résultat. Soit k, p entiers tels que $k \leq p \leq n$.
   (a) Combien y a t-il de résultats possibles ?
   (b) Combien de résultats pour lesquels la boule numéro 1 est prélevée k fois exactement ? ($k \leq n$)
   (c) Combien de résultats pour lesquels la boule numéro 1 est prélevée k fois au cours des p premiers tirages ? (la boule numéro 1 pouvant être prélevée après le tirage $n°p$)
   (d) Combien de résultats pour lesquels la boule numéro 1 est prélevée pour la k ième fois au p ième tirage ?
7. Exo : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *dérangement* toute permutation de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ sans point fixe, c'est-à-dire tout élément σ de $\mathcal{S}_n$ vérifiant $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \sigma(k) \neq k$. On note d_n le nombre de dérangements et on pose $d_0 = 1$ par convention.
   (a) Expliciter d_1, d_2 et d_3.
   (b) Montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} d_j$
8. Révision : ($\mathrm{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) Soit $n \geq 2$ et $a_1, \ldots, a_n$ dans K deux à deux distincts.
   (a) Montrer que pour tout $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathrm{K}^n$, il existe un et un seul $\mathrm{P} \in \mathrm{K}_{n-1}[\mathrm{X}]$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $b_i = \mathrm{P}(a_i)$
   (b) On note, pour $i \in [\![1, n]\!]$, L_i l'unique polynôme de $\mathrm{K}_{n-1}[\mathrm{X}]$ vérifiant $\forall j \in [\![1, n]\!]$ $\mathrm{L}_i(a_j) = \delta_{i,j}$. Expliciter L_i, justifier que la famille $\mathcal{L} = (\mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_n)$ est une base de $\mathrm{K}_{n-1}[\mathrm{X}]$ et exprimer P polynôme quelconque de $\mathrm{K}_{n-1}[\mathrm{X}]$ dans cette base.
   (c) Écrire la matrice de passage de la base $\mathcal{L}$ à la base canonique de $\mathrm{K}_{n-1}[\mathrm{X}]$.
   (d) Déterminer tous les polynômes de $\mathrm{K}[\mathrm{X}]$ vérifiant $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $b_i = \mathrm{P}(a_i)$ (*on se ramènera à une équation linéaire*)
9. Révision d'exo : Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathrm{K})$ une matrice vérifiant $\mathrm{A}^n = 0$ et $\mathrm{A}^{n-1} \neq 0$. Montrer que A est semblable aux matrices : $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{N}^\intercal$
10. Révision d'exo : Soit A une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ telle que $\mathrm{A}^2 = 0$. On note f l'endomorphisme de K^n canoniquement associée à A et r le rang de A.
    (a) Montrer que $r \leq \frac{n}{2}$
    (b) On suppose que $\mathrm{A} \neq 0$.
       a. Justifier que $0 < r$ et qu'il existe une base de $\ker f$ de la forme $(f(e_1), \ldots, f(e_r), e_{r+1}, \ldots, e_{n-r})$ puis montrer que la famille $\mathcal{B} = (f(e_1), \ldots, f(e_r), e_{r+1}, \ldots, e_{n-r}, e_1, \ldots, e_r)$ est une base de K^n.
       b. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
    (c) Déterminer les matrices M de $\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ vérifiant $\mathrm{M}^2 = 0$.

Bonnes vacances à tous !

PRÉVISIONS : Séries numériques puis Proba.

Rappel, les colles des **jeudis 1er mai et 8 mai devront être déplacées**. Pas de colle la semaine de l'Ascension.