Programme de colle semaine n°26 - semaine du 5 mai

Le cours doit être parfaitement su.

Révision - DL

Tout exercice sur le sujet, y compris des calculs de limites

Séries à termes réels ou complexes

La série de terme général u_n est notée $\sum u_n$ et en cas de convergence sa somme est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Somme partielle. Le terme général u_n d'une série convergente tend vers 0. Critère de divergence grossière. Le reste d'ordre n d'une série convergente tend vers 0. Opérations sur les séries.
Les séries de référence :

— les séries géométriques $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et valeur de la somme ;

— série exponentielle $\forall z \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$. Application : développement en série de $\mathrm{ch}(x)$, $\mathrm{sh}(x)$, $\cos(x)$ et $\sin(x)$ pour tout x réel.

— Séries de Riemann : $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. Encadrement des sommes partielles et équivalent de S_n dans les cas de divergence. Encadrement des restes et équivalent de R_n quand la série converge.

Séries à termes positifs : Théorème de comparaison si à partir d'un certain rang, on a $0 \leq u_n \leq v_n$, alors la convergence de $\sum v_n$ implique la convergence de $\sum u_n$ et la divergence de $\sum u_n$ implique la divergence de $\sum v_n$.
Corollaire : si $u_n \sim v_n$, avec $(v_n)_n$ de signe constant, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
Pas de résultat sur les sommations des relations de comparaison en 1ère année

Révision : Comparaison série/intégrale

(Le critère de D'Alembert a été vu).

Critère des séries alternées et majoration des restes.

Convergence absolue. Toute série absolument convergente est convergente et dans ce cas : $|\sum_{k=n}^{\infty} u_k| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |u_k|$.

Si $a_n \geq 0$ et $u_n = \mathrm{O}(a_n)$ alors la convergence de $\sum a_n$ implique la convergence absolue de $\sum u_n$

Exemples : si $|q| < 1$, la série $\sum n^\alpha q^n$ converge absolument ($n^\alpha q^n = o(\frac{1}{n^2})$) ; la série $\sum \frac{\ln n}{n^2}$ converge ($\frac{\ln n}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$

Étude d'une suite : la suite u a même nature que la série $\sum(u_n - u_{n-1})$. Exemples : $\mathrm{H}_n = \ln n + \gamma + o(1)$

N.B. L'équivalent de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ sera vu lundi matin. *Les élèves doivent connaître cet équivalent.*

N.B. Je n'ai pas encore traité les fractions rationnelles ; les élèves ne sauront pas décomposer en éléments simples sans indication, sauf fraction rationnelle du type $1/n(n+k)$. Une question du type : *"Calcul de la somme* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$*"* doit, à ce stade de l'année, mentionner la forme de la D.E.S.

QUESTIONS DE COURS ou exo de cours :

1. Le terme général d'une série convergente tend vers 0 et le reste d'une série convergente tend vers 0.
2. Nature des séries géométriques et expression de la somme en cas de convergence.
3. Théorème de comparaison pour les séries à termes positifs. Énoncé et démonstration. (Version inégalité ou version équivalent)
4. Critère des séries alternées. Énoncé et démonstration, avec majoration des restes.
5. Montrer que pour $\alpha \in]0,1]$, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge et équivalent de la somme partielle.
6. Montrer que si $\alpha > 1$, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge et équivalent du reste.
7. Nature des séries suivantes : $\sum \frac{n}{2^n}$, $\sum \frac{\ln n}{n^2}$, $\sum \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$ et $\sum \frac{1}{n \ln n}$, $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \exp\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$
8. La suite $(u_n)_n$ est de même nature que la série $\sum(u_n - u_{n-1})$.
   Application : la suite $u_n = \mathrm{H}_n - \ln n$ est convergente, on écrira $\mathrm{H}_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

Pensez à décaler vos colles du jeudi 8 mai.

PRÉVISIONS : Probabilités sur un univers fini *(le début)*