Programme de colle semaine 28 - semaine du 19 mai

Le cours doit être parfaitement su.

Variables aléatoires définies sur un univers fini (le début)

1) Loi

Définition d'une V.A. Notation pour les événements associés à une VA : $(\mathrm{X} \in \mathrm{A})$, $(\mathrm{X} = a)$, $(\mathrm{X} \leq a)$ etc
Loi. Exemples : loi uniforme sur un ensemble fini, loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ (et notation $1_{\mathrm{A}} \sim \mathcal{B}(\mathrm{P}(\mathrm{A}))$), loi binomiale (situation : si X compte le nombre de succès dans une suite de n épreuves de Bernoulli indépendantes où chaque succès arrive avec probabilité p alors $\mathrm{X} \sim \mathcal{B}(n, p)$).
Loi d'une fonction d'une variable aléatoire $\mathrm{Y} = \varphi(\mathrm{X})$
Vocabulaire sur les couples de V.A. (lois marginales, loi conditionnelles)

2) Indépendance

Indépendance de 2 variables aléatoires, notation $\mathrm{X} \perp\!\!\!\perp \mathrm{Y}$. Indépendance mutuelle d'une famille de n variables aléatoires. Lemme des coalitions.
Théorème de stabilité des lois binomiales : si $\mathrm{X} \sim \mathcal{B}(n_1, p)$, $\mathrm{Y} \sim \mathcal{B}(n_2, p)$ et si $\mathrm{X} \perp\!\!\!\perp \mathrm{Y}$ alors $\mathrm{X} + \mathrm{Y} \sim \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$.
Application : loi de $\mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_n$ si $(\mathrm{X}_i)_i$ famille de VA indépendantes, suivant toutes la loi $\mathcal{B}(p)$.

3) Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe.

1) Définition, interprétation. Exemples de calcul d'espérance (lois usuelles en particulier).
2) Théorème de transfert : $\mathrm{E}(\varphi(\mathrm{X}))$ (X pouvant être un couple ou un uplet de VA réelles ou complexes).
   Calcul de $\mathrm{E}(\mathrm{X}^2)$ pour une loi binomiale en passant par $\mathrm{E}(\mathrm{X}(\mathrm{X}-1))$.
3) Propriétés de l'espérance :
   — Linéarité de l'espérance
   — si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{E}(\mathrm{XY}) = \mathrm{E}(\mathrm{X})\mathrm{E}(\mathrm{Y})$. Corollaire : si (X_i) famille mutuellement indépendante, alors $\mathrm{E}(\mathrm{X}_1 \cdots \mathrm{X}_n) = \mathrm{E}(\mathrm{X}_1) \cdots \mathrm{E}(\mathrm{X}_n)$.
4) Inégalités sur l'espérance pour les VAR :
   (1) si X VA à valeur positive $\mathrm{E}(\mathrm{X}) \geq 0$, (croissance) $\mathrm{X} \leq \mathrm{Y} \implies \mathrm{E}(\mathrm{X}) \leq \mathrm{E}(\mathrm{Y})$,
   (2) (inégalité triangulaire) $|\mathrm{E}(\mathrm{X})| \leq \mathrm{E}(|\mathrm{X}|)$.
   (3) (inégalité de Cauchy-Schwarz) $|\mathrm{E}(\mathrm{XY})| \leq \sqrt{\mathrm{E}(\mathrm{X}^2)}\sqrt{\mathrm{E}(\mathrm{Y}^2)}$. *(démo avec les sommes finies, car j'avais admis l'inégalité Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ en cours d'année, on verra la démo dans le cadre du bilinéaire (prochain chapitre).*
   (4) Inégalité de Markov : si X V.A. positive $\forall a > 0$, $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geq a) \leq \dfrac{\mathrm{E}(\mathrm{X})}{a}$

N.B. La notion de variance n'a pas été abordée cette semaine. Reportée à la semaine prochaine.

Questions de cours :

1) Si $\mathrm{X} \sim \mathcal{B}(n,p)$, $\mathrm{Y} \sim \mathcal{B}(m,p)$ et si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{X}+\mathrm{Y}$ suit la loi $\mathcal{B}(n+m,p)$.
   Application à la loi de la somme de n V.A. mutuellement indépendantes de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.
2) Calcul de l'espérance d'une va de loi binomiale.
3) Inégalité de Markov (énoncé et démonstration)
   On considère une suite $(\mathrm{X}_n)_{n\geq 1}$ de v.a. indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $\{-1,1\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{S}_n = \mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \cdots + \mathrm{X}_n$.
   (1) a. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{E}(e^{t\mathrm{S}_n}) = (\operatorname{ch} t)^n$.
       b. Montrer que $\forall t, \operatorname{ch}(t) \leq e^{t^2/2}$ Indication : comparer les développements en séries.
   (2) Soit $a > 0$.
       a. Montrer que $\mathrm{P}(\mathrm{S}_n \geq a) \leq e^{-ta}\mathrm{E}(e^{t\mathrm{S}_n})$ pour tout $t > 0$.
       b. En déduire $\mathrm{P}(\mathrm{S}_n \geq a) \leq e^{-\frac{a^2}{2n}}$
   (3) Soit $\varepsilon > 0$, montrer $\mathrm{P}\left(\dfrac{|\mathrm{S}_n|}{n} \geq \varepsilon\right) \leq 2e^{-n\varepsilon^2/2}$.
4) Si X est une variance aléatoire telle que $\mathrm{X}(\Omega) \subset [\![0,\mathrm{N}]\!]$ (où $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$), établir $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{P}(\mathrm{X} > k)$.
   Application : on lance un dé jusqu'à obtenir $'1'$ (en limitant à N le nombre de lancers). On note X la VA égale au nombre de lancers effectués. Déterminer $\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \mathrm{E}(\mathrm{X})$.

   Éventuellement la suite : on lance simultanément 3 dés, on met de côté ceux qui ont donné $'1'$ et on relance les autres. On poursuit ainsi jusqu'à ce que chacun d'eux ait donné $'1'$ et on fait au maximum N lancers. On note X_i le nombre de lancers effectués avec le dé $n°i$ et Y le nombre de lancers pour voir le 1er $'1'$ et T la durée de l'expérience.
   Donner le lien entre Y, T et les X_i puis déterminer $\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \mathrm{E}(\mathrm{Y})$ et $\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \mathrm{E}(\mathrm{T})$

Pas de colle la semaine du 26 mai. Reprise des colles la semaine du 2 juin.
Prévisions : Proba (avec Variance, covariance, inégalité de Bienaymé-Chebychev)- Puis Espaces euclidiens

N.B. Information pour les colleurs : il y aura colle jusqu'à la semaine du 16 juin incluse (car il n'y a pas eu de colles les semaines n°1, 8, 15 et 29. Si vous n'étiez pas disponible jusque là, merci de me prévenir.