Programme de colle semaine 30 - semaine du 2 juin

Le cours doit être parfaitement su.

Variables aléatoires sur univers fini

Voir programme de la semaine précédente avec en plus les notions suivantes :

— Variance, covariance.

— Inégalité de Biennaymé-Chebychev. Loi faible des grands nombres

— Vocabulaire sur les couples de VA (lois conditionnelles)

— Fonction génératrice pour une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, \mathrm{N}]\!]$. Applications aux calculs des moments, ou à la détermination de lois, en particulier lors de somme de VA indépendantes.

Espaces euclidiens

Le cours n'est pas fini, nous n'avons pas encore le résultat sur la distance $d(x, \mathrm{F})$ *si* F *sev de dim finie. Au programme la semaine prochaine*.

A) Produit scalaire

1. Définition d'un produit scalaire, exemples : produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$, produit scalaire intégral dans $\mathcal{C}([a, b])$ *(Le chapitre Intégration n'ayant pas encore été fait, on a admis la propriété : si* f *continue et de signe constant sur* $[a, b]$*, alors* $\int_{[a,b]} f = 0 \implies \forall t \in [a, b], f(t) = 0$*)*, quelques produits scalaires dans $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
   Définition d'une norme sur un ev.
2. Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité. Norme issue d'un produit scalaire (norme euclidienne). Identité du parallélogramme, formules de polarisation.
3. Notion d'orthogonalité, d'angle non orienté de vecteurs . Orthogonal d'une partie, propriété : $\mathrm{A}^\perp$ est un sev de E, $(\text{Vect }(\mathcal{F}))^\perp = \mathcal{F}^\perp$. Si a est non nul, $(\text{Vect }(a))^\perp$ est un hyperplan.
   Famille de vecteurs orthogonale, orthonormale. Liberté de telles familles. Relation de Pythagore.

B) Espaces euclidiens

1. Définition d'un espace euclidien. Existence de bases orthonormales (B.O.N.) dans tout espace euclidien. Toute famille orthonormale peut se compléter en une B.O.N. Expression des coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale et du produit scalaire de deux vecteurs. Expression matricielle $\mathrm{X}^\top\mathrm{Y}$.
2. Les matrices de passage entre deux B.O.N. sont les matrices vérifiant $\mathrm{M}^\mathrm{T}\mathrm{M} = \mathrm{I}_n$ (matrices orthogonales d'ordre n). Propriété : $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. *N.B. Le groupe des automorphismes orthogonaux ou isométries vectorielles de* E *et leurs propriétés ne sont plus au programme de 1ère année.*
3. Supplémentaire orthogonal. Si F est un sev de dimension finie d'un ev E préhilbertien, existence et unicité d'un supplémentaire de F orthogonal à F, on le note $\mathrm{F}^\perp$. Si $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ est une B.O.N de F, la projection orthogonale de $x \in \mathrm{E}$ sur F est $p_\mathrm{F}(x) = \sum_{i=1}^m < x, \varepsilon_i > \varepsilon_i$.
   Lorsque E est euclidien, $\dim \mathrm{F}^\perp$ et égalité $(\mathrm{F}^\perp)^\perp = \mathrm{F}$.

4. Projecteurs orthogonaux. Caractérisation d'un projecteur orthogonal par $y = p_{\mathrm{F}}(x) \iff y \in \mathrm{F}$ et $(x - y) \in \mathrm{F}^{\perp}$. Expression d'une projection orthogonale sur F quand une B.O.N. de F est connue. Inégalité de Bessel.
5. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre, en notant pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ $\mathrm{F}_k = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_k)$ et p_k la projection orthogonale sur F_k, la famille définie par :
$\varepsilon_1 = e_1/\|e_1\|$ et $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $\varepsilon_k = (e_k - p_{k-1}(e_k))/\|e_k - p_{k-1}(e_k)\|$
vérifie : pour tout k, $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ est une B.O.N. de F_k avec $\langle e_k, \varepsilon_k \rangle > 0$. En procédant par étapes successives, on profite de la B.O.N de F_{k-1} pour le calcul de $p_{k-1}(e_k)$.

Questions de cours :

1. Inégalité de Bienaymé-Chebychev (énoncé et démo). Puis application à la loi faible des grands nombres.
2.
   — Si X VA à valeurs dans $[\![0, \mathrm{N}]\!]$, calcul de $\mathrm{E}(\mathrm{X})$ et $\mathrm{E}(\mathrm{X}^2)$ à l'aide d'une fonction génératrice. Application à la loi $\mathcal{B}(n, p)$ (retrouver espérance et variance).

   — Fonction génératrice de $\mathrm{X} + \mathrm{Y}$ lorsque X et Y indépendantes (à valeurs dans $[\![0, \mathrm{N}]\!]$). Application : théorème de stabilité des lois binomiales indépendantes.
3. Démontrer que $< \mathrm{P}, \mathrm{Q} >= \int_0^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ et/ou que $< \mathrm{A}, \mathrm{B} >= \mathrm{tr}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{B})$ définit un produit scalaire sur $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
4. Inégalité de Cauchy-Schwarz. (On indiquera à l'étudiant de considérer la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \|x + ty\|^2$). Étude des cas d'égalité.
5.
   — Si $<,>$ produit scalaire sur E, l'application $x \mapsto \|x\| = \sqrt{< x, x >}$ est une norme sur E.

   — Savoir démontrer qu'une norme est euclidienne (exemple du cours : *on note pour tout* $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{N}(u) = \sqrt{x^2 + 2xy + 4y^2}$. *Montrer que* N *est bien définie sur* $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$ *et que* N *est une norme euclidienne sur* E ou tout autre exemple proposé par le colleur.
6. Si $<,>$ produit scalaire sur E et $\|.\|$ norme euclidienne associée, u, v, x_i $(i = 1..n)$ des vecteurs de E

   — développer $\|u + v\|^2$, $\|u - v\|^2$ et retrouver les formules de polarisation et l'égalité du parallélogramme.

   — Développer (par bilinéarité) $\|x_1 + \cdots + x_n\|^2$; en déduire la relation de Pythagore lorsque $(x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une famille orthogonale.

   — Toute famille orthogonale de E ne contenant pas le vecteur nul est une famille libre de E.
7. Si $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une **B.O.N.**

   a) expression du produit scalaire $< x, y >$ et de $\|x\|^2$ à l'aide des colonnes X et Y des coordonnées de x et de y dans la B.O.N. $\mathcal{B}$.

   b) Les coordonnées dans $\mathcal{B}$ d'un vecteur x sont les $(< x, e_i >)_i$;.

   c) *Application* : Si $\mathcal{B}'$ est une famille de n vecteurs et $\mathrm{P} = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on a

   $$\mathcal{B}' \text{ est une B.O.N. de E} \iff \mathrm{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{P} = \mathrm{I}_n$$
8. Si F est un sev de dimension finie d'un ev E préhilbertien, montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^{\perp}$. *Lorsque* $\dim \mathrm{F} \geq 1$, *on a muni* F *d'une B.O.N* $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$.
Expression de la projection orthogonale sur F.
9. Si p est une projection orthogonale, $\forall x \in \mathrm{E}$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$
10. *Exo* : orthonormaliser la famille de $\mathbb{R}^3$ suivante : $e_1 = (1, 1, 0)$, $e_2 = (1, 0, 1)$ et $e_3 = (0, 1, 1)$ par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Ou exercice similaire proposé par le colleur (sur une famille de fonctions, de polynômes ou de matrices...)

PRÉVISIONS : fin des espaces euclidiens (théorème de la projection orthogonale) puis Déterminant