

Programme de colle semaine 31 - semaine du 10 juin

Le cours doit être parfaitement su.

Espaces euclidiens

Même programme que la semaine précédente, avec le théorème de la projection orthogonale : la distance d'un vecteur x à un sev F de dimension finie est atteinte (c'est un min) en un unique point : le projeté orthogonal de x sur F . Et la notion de symétrie orthogonale.

Tout exercice sur le chapitre.

Déterminants (le début)

Chapitre non entièrement fini mais les élèves savent calculer les déterminants de matrices carrées.

1. Application n -linéaire, application n -linéaire alternée, Propriété d'anti-symétrie.
Formes n -linéaires alternées sur un espace de dimension n .
2. Définition du déterminant de n vecteurs dans une base $\mathcal{B}$ de E , notée $\det_{\mathcal{B}}$. Propriétés, caractérisation des bases, changement de bases.
3. Déterminant d'une matrice carrée A . Expression en fonction des coefficients.
Propriétés : caractérisation des matrices inversibles et si $A \in GL_n(K)$ $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$
 $\det(A^T) = \det A$. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ (*cette dernière propriété est admise cette semaine et sera justifiée avec le déterminant d'un endomorphisme*).

La notion de déterminant d'un endomorphisme sera vue la semaine du 10 juin

Calcul de déterminant : on se ramène au calcul de déterminant d'une matrice carrée

- Opérations sur les lignes et les colonnes.
- Déterminant d'une matrice triangulaire, d'une matrice triangulaire par blocs.
- Développement d'un déterminant par rapport à une ligne et une colonne.

N.B. Toutes les notions suivantes sont reportées à la semaine prochaine : Relation $\text{Acom}^T(A) = \text{com}^T(A)A = (\det A)I_n$, application aux matrices inversibles. Exemple pour $n = 2$. Déterminant d'un endomorphisme. Formules de Cramer. Notion d'orientation

N.B. Le déterminant de VanderMonde sera traité en exercice et le résultat doit être connu des étudiants.

Questions de cours :

1. Si $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in [1,n]}$ est une **B.O.N.** Les coordonnées dans $\mathcal{B}$ d'un vecteur x sont les $(\langle x, e_i \rangle)_i$; expression du produit scalaire $\langle x, y \rangle$ à l'aide des colonnes X et Y des coordonnées de x et de y dans la B.O.N. $\mathcal{B}$.

Application : Si $\mathcal{B}'$ est une famille de n vecteurs et $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \in M_n(\mathbb{R})$, on a

$$\mathcal{B}' \text{ est une B.O.N. de } E \iff P^T P = I_n$$

2. Si $a \neq 0$. Justifier que $H = \{a\}^\perp$ est un hyperplan de E . Expression d'une projection orthogonale sur H , de la réflexion par rapport à H et de la distance d'un vecteur x à H .

3. Théorème de la projection orthogonale : distance d'un vecteur à un sev de dimension finie (on exigera un dessin) avant la démonstration.

4. *Exo* : déterminer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t - a\sqrt{t} - b)^2 dt$.

réponse : min atteint en $a = 6/5$, $b = -3/10$ et la valeur du min est $1/300$.

5. *Exo* :

(1) Si s est une symétrie vectorielle, montrer que : s est une symétrie orthogonale si et seulement si orthogonale, $\forall x \in E, \|s(x)\| = \|x\|$.

(2) Si p est une projection vectorielle, montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si, $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$,

6. Savoir les définitions suivantes du cours ou les formules (sans démonstration). Exemple :

— expression de $\det(A)$ en fonction des $(a_{i,j})$

— formule de changement de bases entre $\det_b(\mathcal{F})$ et $\det_{b'}(\mathcal{F})$ si b et b' sont deux bases de E et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E ,

— Caractérisation des bases à l'aide du déterminant

— formule de développement par rapport à une colonne (ou une ligne),

7. Si f est bilinéaire, exprimer $f(x+y, x+y)$. Si f est bilinéaire et alternée, démontrer que $f(x, y) = -f(y, x)$

8. *Exo* Calculer $D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$

Indication : $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \dots + C_n$

9. *Exo* : Calcul $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & (0) \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}$. (Relation entre D_n , D_{n-1} et D_{n-2} grâce à un développement par rapport à la première colonne).

10. *Exo (polynôme caractéristique d'une matrice compagnon)* :

Soit $(a_0, \dots, a_{n-1})$ n scalaires et λ un scalaire. Déterminer l'expression de

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & & \ddots & -\lambda & a_{n-2} \\ 0 & & & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{vmatrix}$$

PRÉVISIONS : Déterminant (fin) Puis Intégration : Uniforme continuité, construction de l'intégrale.